ILLVSTRIBVS,
NOBILISS. AMPLISS.Q.
HOLLANDIÆ, WESTFRISIAE, ET ZEELANDIAE ORDINIBVS
IOSEPHVS SCALIGER
IVL. CÆS. F.
S. D.



VOD ego, nobiliſsimi atque amplisſsimi viri, huc veſtris decretis euocatus ſim: ſentio equidem cauſſam eam non fuiſſe, vt otioſus elegantiam & amœnitatem vrbium veſtrarum contemplarer, ac illa quiete, quam omnibus moderatio imperij veſtri præſtat, ad deſidiam abuterer: ſed potius (quandoquidem id nos poſſe facere cenſuiſtis) vt publica ſtudia ſtudiis noſtris iuuaremus, eiuſque rei rationem

 apud

apud vos ſolos redderemus, ne præſidium, in quo a vobis locati ſumus, deſerere videamur. Quare permagni mea intereſſe iudicaui, ſi quandiu vos me in eo eſſe voletis, vobis quam creberrime aliquid de noſtris ſtudiis delibemus, quod ſub nomine veſtro lucem pati poſſit. Quod alacrius facimus, cum vos omnibus iis, qui vobis talia conſecrant, humanitatis veſtræ poteſtatem facere, atque omnes in intima comitatis veſtræ admittere videam. Nam captare quo tempore interpellemini, vtrum cum in rempublicam incumbitis, an cum ab omni cura vacui eſtis, id vero fruſtra eſſet. Qui enim res eas tractetis, quæ omni tempore ſolicitudinem veſtram, ſine qua incolumes eſſe non poſſunt, requirunt, vos, qui eas & incolumes eſſe vultis, & præſtatis, ſine ſolicitudine nunquam eſſe exiſtimare debemus. Si igitur molem rerum, quæ prudentia veſtra & conſilio temperantur, reſpicio, nequicquam veſtras aures & oculos mihi vacare poſtulo, quibus nullum

vnquam

vnquam tempus a negotiis vacat: sin autem humanitatem considero, qua tam libenter literas, quam cæteras virtutes amplectimini, qui propositis amplissimis honorariis doctissimos vndecunque viros in vestram luculentam Academiam Lugdunensem inuitatis: hoc fiduciam mihi facit, non solum vigiliis meis, quarum specimen vobis nunc offero, sed etiam mihi ipsi aliquem honorem habitum iri, non quem illæ meruerunt (nullum enim meruerunt) sed quem per æquanimitatem vestram mihi sperare licet: neque vtique propter vllum meritum meum (quo enim facto ego tantos viros demereri possim?) sed propter iudicia vestra, cum ego huc amplissimis vestris decretis venerim, quasi hic mea industria vtilior futura, quam in patria mea esset. Ego vero, qui nihil minus cogitarem, quam me posse præstare quod publicis commodis inseruire posset, nihil magis cuperem, quam vt, si quid tale præstare possem, totum id sepultum, & ignora-

bile in tanta rerum Gallicarum perturbatione lateret: facile tandem passus sum honesto meo & innocēti otio manus a vobis iniici, tanquam vestro sæculo ob id reseruatus, vt qui non poteram vllo studiorum meorum fructu in patria mea, possem hic & vbique vestris iudiciis gloriari. Quod quidem non ad meam solum, sed ad maiorum quoq. meorum amplitudinem, atque gloriam pertinere arbitror, vt vetustissimæ & illustrissimæ nostræ gentis pene vltimus non carerem tantorum virorum testimoniis, quibus ipsi ob benefacta sua & res præclare gestas nunquam caruerunt. Vestra denique tanti apud me fuit auctoritas, vt cum dulcedo patriæ me cogeret etiam ruinas suas amare, tamen non auulsus ab ea, sed ab eadem huc inuitatus esse videar. Meum igitur est ostendere, non solum quam libenter me persuaderi passus sim, sed etiam operam dare, vt quicunque posthac labores nostros lecturi sint, dicant audacter, se non vanum iudiciorum vestrorum fructum percipere. Quibus fretus, Viri

nobi-

nobilissimi, atque amplissimi, non veritus sum vobis opus nouum, & materiam vetustissimam offerre. quæ duo non sine causa distinxi: vt quanto magis exiguitas operis me ab illo vobis offerendo deterrere potuerit, tanto impensius magnitudo materiæ ad se & consequenter propter se ad opus quoque ipsum amplectendum vos hortari possit. Mathematica enim non mole, sed bonitate operis, non multitudine, sed felicitate demonstrationum gloriantur: imo nulla alia re magis, quam acuta breuitate commendari solent. Cuius scientiæ tam certa fides est, vt qui ea non abutatur, nunquam operam ludat: qui vero ea violenter vtatur, id quod prisci Antipho, Bryso, Hippocrates Chius, &, quod satis mirari non possum, magnus Archimedes, in hac re factitarunt; ille ex demonstrationibus suis nihil aliud consequatur, quam vt demonstratiue errare voluisse videatur. Nos vero, qui a priscis illis tantum scientia, quantum ingenio absumus, hoc certo promittere possumus, eos a nobis

 hactenus

hactenus vinci, qua nos omnia non ἀναλογιστικῶς, vt illi, sed κατὰ τὸν ἐπιστημονικὸν λόγον demonstrauimus. Ideo confidenti verecundia pronunciamus & in ipsius quoque rei inuentione longo interuallo eos a nobis vinci: quam, cum eos tandiu fugitarit, nos tandem in conspectum vestrum post tot sæcula sistimus, & nunc primum nomini vestro dedicamus. Tarde quidem eruta est. sed altissime condita erat. Accipite igitur, nobilissimi, & amplissimi Viri, opus expectatione maleuolorum maius, amplitudine vestra ad ingenium nostrum inferius, ad materiæ dignitatem, non aliorum, quam vestro nomine dignius. Valete. Lugduni Batauorum. Kal. Iunij. CIↃ. IↃ. XCIV.

CAN-

CANDIDO LECTORI SALVTEM.



VM in animo haberem hæc Elementa deſcribere, quæ valde confuſa & perturbata in ſchedis liturariis habebam: morbo longo oppreſſus rem diu diſtuli. Quia vero iamdudum tam amicorum preces, quam maleuolorum conuicia hanc editionem diu deſiderari non patiebantur, imperaui mihi: & quamuis à longo & moleſto morbo me nondum recepiſſem: tamen non minus ab animo, quàm a corpore æger cœpi illa confuſa vtcunque digerere, & in mundum tranſcribere. Sed non potui facere, quin, quemadmodum morbus in nobis multa ſui, ita nos in ſcriptura multa morbi veſtigia reliquerimus: qualia ſcilicet, ſunt litera alia pro alia, verbum pro verbo, vt διπλάσιον pro δεκαπλάσιον, πρόβλημα pro θεώρημα, & ſimilia: quæ tu, candide lector, tam beneuole mihi condonabis, quam facile deprehendes ea, non mentis, ſed calami properantis errata eſſe. At id, quod nunc dicam, quamuis & ipſum manus feſtinantis erratum eſt, tamen maleuoli in aliam partem interpretari poſſent. Id eiuſmodi eſt in pagina 73 ab illis verbis: *Ergo triginta ſex triangula,* &c. lineæ 9, ad illa verba: *Ergo Complementum,* &c. lineæ 20; ea, inquam, omnia, erant in litura in ſchedis noſtris. quæ tamen aliud agentes huc inſerſimus. adeo vt quis ea legens animaduertat facile ex alia demonſtratione ad hanc tranſlata nihil ad eandem pertinere. Reponantur igitur fugitiua illa, quæ in alius partis ſchedarum opiſtographo ſcripta oculos noſtros fugerant. Nempe poſt illa verba, *eſſe æqualia duobus circulis:* Dic:

Si triginta ſegmenta & octo reſidua trianguli excedunt circulum duobus triangulis: ergo triginta ſegmenta, & decem reſidua trianguli excedunt circulum duobus triangulis, & totidem reſiduis trianguli, quæ ſunt duo Complementa. Rurſus duplũ triginta ſegmentorum, & octo reſiduorum trianguli, hoc eſt, ſexaginta ſegmẽta & ſexdecim reſidua trianguli excedunt duos circulos quatuor triangulis. Excedent ergo triginta ſegmenta, item triginta ſex triangula, & ſex reſidua trianguli quatuor triangulis. Auferantur vtrinque triginta ſegmenta, & ſex reſidua trianguli. Ergo remanentia triginta ſegmẽta, cum decem reſiduis trianguli

(quæ

(quæ, vt iam diximus, sunt æqualia circulo cum duobus triangulis, & duobus residuis trianguli) excedunt triginta sex triangula remanentia, quatuor triangulis. ablatis duobus triangulis de circulo & de duobus Complementis, circulus remanens cum duobus residuis trianguli excedet triginta sex triangula duobus triangulis. Duo igitur triangula de duobus complementis dempta relinquunt duo triangula de quatuor triangulis. Item duo residua Trianguli de iisdem duobus Complementis relicta relinquunt duo triangula de quatuor triangulis. Quare duo Complementa sunt quatuor triangulis æqualia. Ergo Complementum dividitur, &c. Hæc igitur a 9. linea ad 20, inseres loco illorum, quæ huc malum pedem tetulerunt.

Pag. 75: post lineam vltimam addi possunt hæc. ALITER: *Brevius demonstrari potest: Triginta duo segmenta cum octo residuis segmenti sunt æqualia quadraginta triangulis. Sed duo segmenta cum octo residuis segmenti, sunt æqualia decem triangulis. Ergo triginta segmenta cum decem triangulis sunt æqualia quadraginta triangulis. Ablatis vtrinque denis triangulis, remanent triginta triangula totidem segmẽtis æqualia. Ideo triangulum & segmentum æqualia. Quare triginta triangula cum sex segmentis sunt æqualia triginta sex segmẽtis, aut triginta sex triangulis, etc.*

Pag. 8. linea EM, EN. Lege: *Potentiis triangulorum* EBA, *& dupli* CFA, *& quadrupli* hGA *simul, &c.* Nam omissæ sunt ab artifice duæ minusculæ literæ c, h, in circulo in rectis EF, EG, vbi secant rectas BA, FA.

Ibid. lin. AC duplum. lege: *Ergo circulus* AFBCD *circuli* ALBE

Pag. 20. *Circa datam.* lege: *Volutam ordinatam.*

Pag. 21. lin. *autem peripheri.* lege *Peripheriam* DFH.

Pag. 23. lin. *nullo semid.* Pro F grandiuscula pone minusculam f.

Pag. 24. lin. *rabilis erit.* lege: *erit* AR *apotome.*

Pag. 25. lin. *est* BG. lege: *abscindit Apotomen* AR.

Pag. 27. lin. *peripheriam.* lege: *Peripheriam* BHA.

Pa. 31. lin. ἢ τ κύκλῳ. lege διακεκλάσθαι.

Pag. 34. lin. 14. *quadrata* lege *continentibus perinde sunt.*

Pag. 39. lin. 256. lege CG *est* 144.

Ibidem lin. 14. *rimetri*: lege *per Coroll.* VIII *sexti.*

Pag. 43. lin. FH *ad totam.* lege CH *ad totam*

ad totam. Et deinceps pone semper G pro F.

Pag. 44. lin. *peripheria* L D. lege: *peripheriæ* I L D, *ad ipsam peripheriam* I L D, *ex eadem*.

Pag. 53. lin. *gantur*. lege: *recta* FB, FL. Deleantur enim illa, F D.

Ibid. lin. *gulo*. lege: *per* VI *primi*.

Ibidem. lin. *erit vt* M N. lege: *Sed* MN, ML *ex constructione*.

Pag. 56. lin. CF, EG. lege: *Abscindatur recta* EH *æqualis*.

Pag. 58. lin. *gulum* BGD Peccatum a sculptore in constructione trianguli B G D. Nam interuallum V G minus sumptum est interuallo D V.

Ibid. lin. *Tessarescadecagoni*. Verba illa deleantur: *Ex peripheria* E G *abscindatur recta* E V *æqualis recta* CS. &c.

Ibid. linea: *lygonorum*. lege: AMB, ASB, ATB, AFB.

Pag. 62. lin. *diuisis*: lege *interuallis*, MG, MK.

Pag. 63. lin. *uante. iunctis* H G, H E. Lin. HG est omissa a sculptore.

Ibid. lin. OG, OK. leg. OG, *vel* OK.

Pag. 65. lin. *semidiametrus*. lege *bifariam in* F. *Conectatur recta* GH. *Peripheria*.

Pag. 66. lin. *rursus*. lege, RF, RK.

Pag. 69. lin. DβγE. lege DβγE.

Pag. 70. lin. GDE. lege GEF *Complementum*.

Pag. 71. lin. *nempe vtrumque*. lege *Sed Residuum trianguli, &*

Pag. 87. lin. *Excessus*. lege: *Excessus enim est* $\frac{4}{5}$

Pag. 84. lin. *rectangulo sub*. lege: *rectangulo sub* MA, & LN.

Pag. 88. lin. *diametrum*. lege *faciat latitudinem*.

Ibidem lin. ΠΡΟΤΑΣΙΣ lege ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ. Θεώρημα.

Pag. 100. *lin. & alternando*. lege & *conuersim, vt* KH.

Pag. 101. lin. *cuius, qui*. lege *ita* C, *hoc est, superficies* KLMNOL.

Pag. 106. lin. *tentia igitur*. lege *tentia igitur quadrati* ABGD.

Pag. 108. lin. *tia tantum*. lege *æqualis ipsi* QM.

Pag. 109. lin. *milia*. lege: *triangulum* BRM.

Pag. 111. lin. IM, *erit*. lege: *triangulum* HMI.

Pag. 116. lin. *poterit*. lege, *est maius rectangulo*.

Pag. 118. linea asbT. lege: asbT. *Contrarium ac in maiore Ellipsioide*.

Pag. 121. linea 7. lege. *Potentiam maioris Ellipsioidos*.

Ibid. lin. *circulo*. leg. & *angulus* K.

Igitur hæc, candide Lector, prius corrige & repone, antequam ad lectionem horum elementorum aggrediaris. Aliter operam luseris.

HENRICI,
D. G.
CHRISTIANISSIMI
FRANCIÆ ET NAVARRÆ
REGIS,

SANCTIONE CAVTVM EST:

NE QVIS, QVOSCVNQVE LIBROS NVNQVAM ANTE EDITOS FRANCISCVS RAPHELENGIVS, CHRISTOPHORI PLANTINI GENER, PRIMVS TYPIS VVLGAVERIT, EOSDEM, CITRA IPSIVS (RAPHELENGII) VOLVNTATEM, INTRA PROXIMVM A PRIMA CVIVSQVE LIBRI EDITIONE DECENNIVM, TOTOS VEL EX PARTE, IN VLLIS REGNI FRANCIÆ DITIONIBVS IMITARI, EXCVDERE, ALIBIVE EXCVSOS IN IISDEM VENALES EXPONERE AVDEAT.

PRIVILEGII CONDITIONES, INDICTÆQVE INFRACTORIBVS MVLCTÆ, LATIVS CONTINENTVR IN LITERIS REGIIS, DATIS SIGILLATISQVE IN CONSILIO REGIS, PARISIIS, XXI. APRILIS, ANNO CIↃ. IↃ. XCIV. ET REG. IPSIVS QVINTO, AC SIGNATIS,

DE BAIGNEAVLX.

Exemplar Priuilegij Regij in fine Mesolabij adpositum est.

PROLEGOMENA IN CYCLOMETRICA Elementa.

Ad candidum Lectorem.



CVM IN omni Problemate considerandum sit semper τὸ ζητούμενον, cuius inuestigatio nobis præcipitur, id autem inuenire non sit semper in nostra potestate, veteres illi summi Mathematici, διορισμὸν excogitarunt, quatenus dignosci posset, quando τὸ ζητούμενον esset δυνατὸν, aut quatenus ἀδύνατον: eiusque Theoriæ commentarium conscripserat Leon Neoclidis discipulus, Eudoxi æqualis: Τὸ ζητούμενον, inquiebant, aliud est πόριμον, aliud ἄπορον. Πόριμα sunt, quæcunque aut cum demonstratione construi possunt, vt, Super data recta finita Triangulum æquilaterum constituere: aut sine demonstratione, vt, illo centro, & illo interuallo circulum describere. His contraria sunt, quæ fieri quidem posse non dubitamus, sed eorum factionem ignoramus, vt circulum quadrare: duas medias proportionales inter duas datas inuenire. Quæ quidem, quatenus eorum factio ignorabilis, à veteribus dicuntur ἄπορα, quatenus autem fieri possunt, dicuntur ποριστά. Nam quatuor continuè proportionales inuenire quidem possumus, per XII sexti: sed illarum quatuor datis extremis, quomodo duæ mediæ proportionales reperiri possint, nemo quidem hactenus comminisci potuit, sed nemo paulo doctior desperauit inueniri posse. Quia enim hactenus via, quibus illæ inuestigandæ sint, patefacta non

fuit, propterea negare vllam esse viam illas deprehendendi, id vero est hominis ἀγεωμετρήτου, & nihil omnino in Mathematicis videntis. Nam quomodo demonstrare possunt id fieri non posse, aut circulum quadrari non posse? Nullam adferre possunt demonstrationem, nisi inanibus contentionibus apud doctos sese traducere velint. Multa à veteribus Geometris ἄπορα ἀναπόδεικτα edebantur, quod exploratum haberent, ea fieri quidem posse, sed tamen nondum fieri, quia nondum possent demonstrari. Ipsi tamen ea vulgo proponebant, contenti indicare, & digitum ad fontem intendere: quasi magnæ sibi laudi fore putantes, si in eorum laude, qui ea demonstrare possent, acquiescerent. & sanè Conon de voluta ordinata proposuit tantum: Archimedes autem demonstrauit. Idem etiam Archimedes ἄπορα multa mittebat familiaribus suis, sine vllis demonstrationibus, tanquam homines nudos detractis vestimentis, Dositheo quidem περὶ κωνοειδέων, καὶ σφαιροειδέων, Cononi autem Samio περὶ ἑλίκων: quæ cùm primùm dumtaxat proposuisset, postea tamen demonstrauit. Ista ἄπορα etiam dicebantur ἠπορημένα: postquam autem demonstrationem nacta erant, τεθεωρημένα. De quibus problematis merito dici potest, quod de Camelo Æsopico: quem primum visum reformidarunt homines: processu temporis propius accedentes, cicurem & mansuetam bestiam esse experti sunt. Quod respiciens Archimedes, ποιὰ, inquit, τῶν ἐν γεωμετρίᾳ θεωρημάτων οὐκ εὐμέθοδα ἐν ἀρχᾷ φανέντα χρόνῳ τὴν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι. Ergo τὰ πρότερον ἠπορημένα aut ipsimet soluebant, vt Archimedes illa ad Dositheum, & Cononem. aut alij postea demonstrabant, vt Archimedes τὰ ὑπὸ Κόνωνος περὶ ἕλικος ἠπορημένα, item Hermotimus proposita ab Eudoxo, & Theæteto. Inter tot ἄπορα nobilissimum illud à vetustissimis Græcis propositum est: τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἴσον χωρίον εὐθύγραμμον εὑρεῖν. Circulum esse χωρίον ne ij quidem negauerint, qui circulum quadrari posse negant. (Quod genus hominum χθὲς καὶ πρώην εἰς τοὺς ἀνθρώπους εἰσεφθάρη) Sed qua fronte nega-

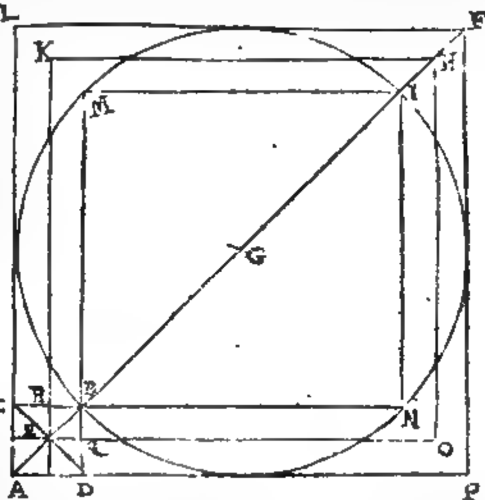
negabunt ſpatio ſpatium æquale dari poſſe? Quare rem tanta contentione veteres illi ſummi viri, & omni exceptione maiores tentaſſent, niſi ποριστόν τι eſſe putaſſent? Atque vt horum nouitiorum rationem habendam non cenſeo, ita illorum iudicia probare minimè poſſum, qui ob id circulum quadrari poſſe dicunt, quod & quædam Lunula quadrari poteſt, quæ μηνίσκος Græcis dicitur, auctorem ſecutis Hippocratem Chium. Præpoſtere enim concludunt: quod non ideo circulus quadratur, quia & lunula: imo lunula & circulus ideo quadrantur; quia ambo ſunt ſpatia, & omni ſpatio ſpatium rectilineum æquale dari poteſt. Nullum quippe ſpatium eſſet, niſi & quædam eius eſſet δύναμις. At δύναμις nihil aliud eſt, quam quadratum. Eſt ergo quadratum aliquod circuli, id eſt, quadratum aliquod, cui ſpatium circuli, quod Græci ἐμβαδὸν κύκλου vocant, æquale ſit. Qui igitur circulum quadrari poſſe negant, vna opera & circulum δύναμιν eſſe neganto. Aut quænam erit hæc fabula, Circulum eſſe δύναμιν; & tamen huic δυνάμει nullam δύναμιν æqualem reperiri poſſe? En hominum Geometriam. Nos verò cum Marino vetere Geometra aliter pronunciemus: ἄπορόν ἐστι, τὸ τῷ ποριμῷ ἀντικειμένως ἔχον, ὡς ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμός. οὔπω γάρ ἐστιν ἐν πόρῳ, εἰ καὶ οἷόν τε αὐτὸ πορισθῆναι, καί ἐστιν ἐπιστητόν. ἐπιστήμη γὰρ αὐτοῦ οὔπω κατείληπται. Neque aliter ſentiunt Ariſtoteles, & eius omnes veteres interpretes Græci, alij homines ab iſtis nouis quadrationis circuli hoſtibus. Cum igitur quadratio circuli ſit ποριστὴ quidem, non autem ἐν πόρῳ, non mirum eſt, ſi tantum ſtudium veteres in πορισμῷ eius poſuerunt. Quibus animaduerſis altius repetenda eſt huius rei ratio, & quid & quantum in ea effecerint illi. In circulo duo ſunt ἄπορα: ratio perimetri ad diametrum, & τετραγωνισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ, hoc eſt τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου. Atque propterea hæc tractatio in duo ſumma faſtigia diuiditur: in id ſcilicet, quod ad perimetrum, & in alterum, quod ad potentiam circuli pertinet. Priorem partem vocemus τὸ κυκλοπεριμετρικόν, alteram τὸ κυκλοδυναμικόν: in quæ ſumma capita, vt

 diximus,

diximus, tota *κυκλοπεριμετρία* diuiditur. De recta quæ perimetro ſit æqualis, parum laborarunt, imo ne curarunt quidem. Eam enim & aurigæ quotidie notare licet, cum ex quauis orbita rota eam abſcindat ad idem punctum, quod in ea eſt, à quo primum moueri cæpit, reuoluta. Tam trita enim res negotium nemini paulo intelligentiori faceſſere potuit. Quare Archimedes prima propoſitione Cyclometrici ſui proponit triangulum orthogonium, cuius angulus rectus continetur ſemidiametro, & recta, quæ perimetro æqualis ſit, cum tamen nihildum de ea demonſtraſſet: quod ſciret rem omnibus notam in dubium nunquam reuocatum iri. Itaque ciſiarij vel aurigæ eſt, dare modum illius lineæ: Geometræ autem demonſtrare, quæ eius ratio ſit ad diametrum: item quomodo circulo dato illa reperiri poſſit: quod quidem Archimedes diuinus, licet infeliciter, & mendoſiſſime, in ſecunda & tertia demonſtratione eiuſdem libelli exequitur, cum eam longitudinem numeris exprimere conetur, quod poſt illum aliis numeris Apollonius Pergæus, & Philo Gadarenus tentarunt, excogitatis infinitis myriadum anfractibus, ex quibus lector pedem extricare non poſſit. Sed noui Geometræ præter ſtuporem, quo negant, circulum quadrari poſſe, volunt liberius inſanire, cum aiunt, ideo circulum quadrari non poſſe, quod, vt aiunt, ex rotunda linea, nunquam efficies rectam. Nam nolui eorum verba mutare. Itáne, doctiſſimi Geometræ, delitiæ humani generis? Quid habet commune peripheria circuli cum eius potentia? non mehercule magis, quam quadratio *μηνίσκου*, cum linea, quæ *κυρτὴ*, & ea, quæ *κοίλη*. Neque magis, quam cum curuatura delumbata ἡ *παραβολὴ*, quam quadrauit Archimedes. Quocunque ſeſe vertunt iſti *θαυμάσιοι* Geometræ, ſemper aliquid nouum ſciſcunt, vnde eorum captus in Geometricis cognoſci poſſit. Sæpe mihi riſum tollunt: aliquando etiam bilem mouent. Tanta eorum eſt cum tanta inſcitia coniuncta impudentia. Sed ad rem. Ad negotium cycloperimetricum pertinent polygona circulo inſcribenda, &

da, & consequenter triangula isoscelea, quorum alteruter æqualium angulorum habeat rationem datam ad reliquum. Sed eorum rationem hactenus ignoratam vidimus. Quid autem Archimedem mouerit, vt aduersus ὀφθαλμοφάνειαν, & χειρουργίαν ipsam, rationem perimetri longitudinis ad diametri longitudinem pronunciaret supra triplam, minorem esse vna septimá longitudinis diametri, infra dicetur. Sed & excusandus videtur, quod quomodo ea linea Geometrice inueniri possit, non definiuit. Multi enim ante eum putarunt se eius rei viam iniisse, excogitatis alius aliis curuis lineis infinitis, quas τετραγωνιζούσας vocarunt: quod per illas sese quadrantem perimetri inuestigaturos sperarent: & sub quadrante perimetri, aut ipsa perimetro, ac diametro, aut semidiametro rectilineum conceptum potentiæ circuli esse æqualem crederent. Itaque Hippias vetustissimus Geometra, omnes veterum τετραγωνιζούσας in vnum conspectum coniecit, ac de illis volumen conscripsit. Sed valde illos decepit opinio sua. Nam nulla est cognatio τοῦ ἐμβαδοῦ cum rectilineo sub semidiametro ac perimetro concepto. Eorum, qui τετραγωνιζούσας commenti sunt, familiam ducere videtur Dinostratus, omnium, vt videtur, vetustissimus, vtpote Menæchmi frater, Eudoxi æqualis, commentus lineam decircinationis delumbatæ, vt verbum Vitruuianum vsurpem, quam ipse falso τετραγωνίζουσαν vocauit: cum ea nihil ad τετραγωνισμὸν faciat, vt alibi ostendimus. Ea nihil aliud est, quam ἕλιξ σεσαλευμένη, voluta luxata, aut delumbata: cui nos personam detraximus, ac eius decircinandæ rationem docuimus, quod fieri posse desperauit olim Sporus Nicenus. Ea enim comparata fuit non ad τετραγωνισμὸν, sed ad quadrantem perimetri inuestigandum. Præterea ostendimus punctum in ea, quod πέρας τῆς τετραγωνιζούσης vocat Pappus post Sporum, quomodo Geometrice deprehendatur, quod tamen omnino negauit fieri posse apud Pappum Sporus. Cuius Pappi verba attulimus: τὸ πέρας αὐτῆς, ᾧ χρῶνται πρὸς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου, τοῦτ᾽ ἔστι, καθ᾽ ὃ τέμνει σημεῖον τὴν ἀπὸ εὐθεῖαν, οὐχ εὑρίσκεται.

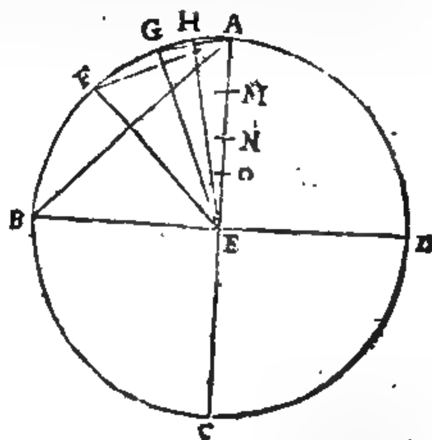
Nos ergo plus fecimus, quam & Dinoſtratus ipſe, & quam Sporus. Nam & quid eſſet, & quomodo deſcribi poſſet, oſtendimus, & præterea punctum ipſum non ſolum deprehẽdimus, ſed etiam, quid eſſet, docuimus. Omnino τετραγωνίζουσα Dinoſtrati nihil aliud eſt, quam dimidium Volutæ luxatæ; quod iam tetigimus. Sequitur cyclodynamica pars longe nobilior, quam illa altera, & propter quam in tot contraria ſtudia diſceſſum eſt à veteribus. Nam ἄπορον illud & nobiliſſimum omnium, & antiquitus omnibus propoſitum fuiſſe, palam eſt. Primus omnium quod ſciamus Bryſon, ſiue Briſon, (Βρύσων, & Βρίσων inuenio ſcriptum) illi manus iniecit. Circa circulum IB, cuius centrum G, deſcribatur quadratum FA, & in eodem inſcribatur quadratum IB. Rurſus idem centrum G obtineat quadratum HE, cuius latus EK ſit æquale rectangulo ſub BM, AL, hoc eſt, ſub lateribus quadratorum, inſcripti, & circumſcribentis. Ducta diametro FA, rectæ NB, OE productæ occurrant lateri LA: item rectæ KE, MB occurrant productæ lateri AP. Per XXIIII. ſexti, rectangula tam BA, quam BE, EA, ſunt quadrata. Connectatur recta CD. Erunt anguli BCD, BDC ſemirecti: angulus vero CRE, rectus. Ergo angulus REC ſemirectus, per XXXII. primi. Quare per ſextam eiuſdem, rectæ RC, RE ſunt æquales. Eodem modo demonſtrabitur, rectas QE, QD eſſe æquales. Igitur parallelogramma CE, ED ſunt quadrata, & æqualia quadratis BE, EA. Imo quatuor quadrata BE, EA; CE, ED ſunt inter ſe æqualia, per primam communem ſententiam. Ergo & diametri BE, EA ſunt æquales. Æqualiter igitur diſtat quadratum BE à quadratis FA, IB: & propterea medium eſt tam ſitu, vt demonſtratum eſt, quam potentia, ex constructione.



ctione. Sumptum enim est medium proportionale inter latera IM, FL. Bryson igitur considerans minus quadratum dari posse circulo, nempe quadratum IB, & maius quoque eodem, nempe quadratum FA: putauit æquale circulo esse id, quod medium esset inter minus IB, & maius FA. Erit igitur ipsum HE æquale circulo. Ita ille. Sed hoc epichiremate multis nominibus ludibrium omnibus debuit. Primum, quod medium inter quadratum circunscribens, & quadratum inscriptum, non meruit magis esse æquale circulo, quam alia quæuis æquilatera figura, media inter similem inscriptam, & similem circunscribentem. Imo longe minus est quadratum HE quadrato circuli: quia quadratum circuli maius est latere trigoni isopleuri eodem circulo inscripti: HE vero quadrati latus KE minus eodem latere. Multo minus igitur latere quadrati circulo æqualis. Nam latus trigoni isopleuri est æquale rectangulo sub tota diametro, & tribus quartis longitudinis diametri. Latus vero KE est æquale rectangulo sub eadem diametro, & latere IM. quod quidem minus est tribus quartis longitudinis diametri. Deinde datis minore, & maiore, posse dari medium aut æquale, falsum conuincit ἡ κερατοειδὴς γωνία, qui est angulus minor omni minimo angulorum rectilineorum. Omitto alia ἀτοπήματα: quorum præcipuum est latus quadrati KE longe minus, quam latus quadrati circulo IMBN congruentis. Quod primus deprehendit, certè primus publicauit Antipho ita. Esto circulus ABCD, cuius quadranti EAB inscriptum sit quadrati latus BA. Rursus recta



EF diuidat bifariam peripheriam AGFB. Itidem recta EG diuidat peripheriam AGF bifariam. & denique recta EH peripheriam GHA bifariam. Subtendantur recta FA, GA. Componantur in vnum omnes po-



tentiæ triangulorum inſcriptorum, per XLVII primi. Itaque potentiis EM, EN, EO triangulorum EBA, & dupli EFA, & quadrupli GHA ſimul compoſitis, conflauit potentiam IK æqualem quadranti EBFGA. Putauit enim hac continua ſectione ſeſe aſſecutum peripheriam AH. Propterea dupla IKL erit quadruplum ipſius EBFGA, atque ideo æqualis toti circulo ABCD. Sed hoc eſt κύκλον τεμαχίζειν, non autem τετραγωνίζειν. Præterea rem abſurdam facit, qui deſinens in ſectione peripheriæ GHA putauit non amplius poſſe ſecari. Tollit enim τὴν εἰς ἄπειρον τομήν. Deinde quod exiſtimauit poſſe dari peripheriam ſubtēſæ æqualem: aut ſi non putauit, quomodo putat ſe rem factam habere? Hunc Antiphontem excepit valentior ſecutor, vt omnes veteres ſentiunt, Hippocrates Chius, ex mercatore & naufrago Geometra, & philoſophus: Cuius hoc fuit ἐπιχείρημα. In circulo AFBCD, diametris AC, BD ſeſe normaliter ſecantibus, inſcribatur latus quadrati AB. circa quod deſcribatur circulus ALBE. Per II duodecimi, vt quadratum AC, ad quadratum AB, ita circulus AFBCD ad circulum ALBE. Eſt autem quadratum AC duplum quadrati AB. Ergo circulus AFBCD, ALBE duplus: & conſequenter ſemicirculus BFAD toti circulo ALBE, & quadrans AFBEA ſemicirculo ALBA æqualis. Ablato communi AFBA, remanebit μηνίσκος, ſiue, vt Plautus loquitur, lunula ALBFA triangulo ABE æqualis. Propter hanc Lunulæ quadrationem, immane quantum nomen Hippocratis fuerit apud veteres adeo, vt Proclus non

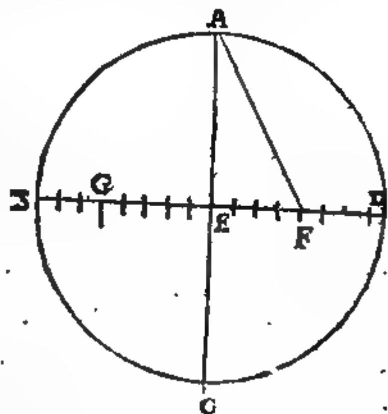
vulgari

vulgari genere ob id eum commendarit. Equidem Geometriam hic agnoſco, acumen non video. Nam ſi omnem Lunulam quadraſſet, magnum quidpiam præſtitiſſet τὸ καὶ ἰσομβύοσα πυθέαξ. Nunc vero rem vulgatiſſimam & cuiuis Geometriæ tironi parabilem fecit. Porro quadratum AC eſt quadruplum quadrati AE. Sed idem eſt duplum quadrati AB diametri circuli ALBE. Ergo recta AE, aut EB eſt latus quadrati circulo ALBE inſcripti. Erit ergo AIE, vel EHB ſegmentum quadrati. Et quia circulus AFBCD circuli ALBE eſt duplus: propterea, per XV quinti, ſegmentum AFB ſegmenti ſimilis AIE erit duplum. Deſcribatur ſegmentum AGB ſegmento AFB æquale. Erunt igitur ſegmenta duo, vel figura AFBGA compoſita ex vtroque, æqualis quatuor ſegmentis quadrati circulo ALBE inſcripti. Quare reliqui duo μηνίσκοι ALBFA, AEBGA ſunt quadrato æqualia circulo ALBE inſcripto. Nihil igitur noui egit Hippocrates, qui in μηνίσκους duos quadratum circulo inſcriptum transformauit. Nam abſque illa quadratione quadratum ſemper eſt γνώριμον, ſegmenta autem ἄπορα. Hoc, inquam, non magis facit ad quadrandum circulum, quam quadratum ipſum circulo inſcriptum, cum idem vtrumque ſint. Quare cum ille μηνίσκου τετραγωνισμὸς nihil ad κύκλου τετραγωνισμὸν faciat, quomodo Hippocrates circulum per Lunulam quadrare conatus ſit, amplius deliberandum. Nam non quadraſſe, certum eſt. Neque veteres vero, neque Ariſtoteles hoc aperiunt. Tantum colligimus ex primo de Natura eum inſtitiſſe principiis Geometriæ in quadrando circulo. Ibidem autem ait hoc feciſſe per τμήματα. Quare obſcuriſſimum eſt, quod inde colligimus, Antiphontem non ſeruaſſe principia, Hippocratem ſeruaſſe. Nam Hippocrates & Antiphon ſumpſerunt γεωμετρικῶς quadratum circulo inſcriptum: Hippocrates quidem Lunulas duas quadrato æquales: Antiphon autem ipſum quadratum: Hippocrates, inquit Ariſtoteles, abſoluit τετραγωνισμὸν διὰ τμημάτων: hoc eſt, tandem ſumpſit peripheriam tanquam hypote-

nusæ æqualem. Idem fecit & Antiphon: quod est contra principia Geometriæ. Itaque cum Aristoteles dicat alterum Geometrice, alterum non Geometrice rem tractasse, difficile est certum de toto negotio pronunciare. Non multo post Dinostratus Eudoxi familiaris rem aggressus est, adhibita in consilium linea, quam, vt diximus, frustra τετραγωνίζουσαν vocauit. Neque enim magis quadrataria, quam quadrantaria vocanda fuit, quod ad quadrantem perimetri inueniendum excogitata sit, non ad circulum quadrandum. Quia iste vetustissimus est auctor, non immerito suspicamur, eum principem τετραγωνίζουσαν excogitasse, cum alij multi τετραγωνιζούσας, vt diximus, architectati sint. & sane, friuola causa ei commento præiuit. Putauit enim primus omnium rectangulum sub semidiametro & semiperimetro conceptum aut triangulum rectangulum, cuius duorum laterum angulum rectum continentium, alterum semidiametro, alterum toti perimetro æquale esset, posse τὸ ἐμβαδὸν κύκλου. Hæc enim opinio fuit incus omnium τετραγωνιζουσῶν. Nam quo quadrans perimetri, aut semiperimetrus per illam lineam inuestigata, si non eam ad τετραγωνισμὸν facere existimarent? Quod indubitate verum est. Hos (qui omnes æquales fuerunt) longo interuallo sequitur Archimedes, qui in circulo quadrando nihil noui contulit de suo, sed τεμαχισμὸν ab Antiphonte, inuestigationem τοῦ ἐμβαδοῦ à Dinostrato, reiecta tamen quadrataria linea (quia eam construere non poterat) demonstrationem à Brysone, emendatis tamen prius eorum principiis, mutuatus est. Nam cum putaret potentiam per τεμαχισμὸν & segmenta Antiphontis deprehensam omnino conuenire circuli potentiæ, placeret autem illi sententia Dinostrati de rectangulo sub semidiametro, & semiperimetro contento, id autem non posset demonstrare, ad incitas redactus confugit ad argumentum Brysonis, aut non abludens ab eius argumēto. Quemadmodum enim ille dicebat, posse æquale reperiri, si maius & minus constant: ita Archimedes putauit, si triangulo proposito circulus propositus

positus non esset maior, aut minor, ergo æqualem. Quod manifesto vitiosum est, vt alibi demonstrauimus. Præterea cum hæreret sententiæ Dinostrati de rectangulo sub semidiametro, & semiperimetro contento, & tamen videret id rectangulum maius esse potentia per τεμαχισμὸν Antiphontis inuenta, ausus est rem absurdissimam pronunciare: perimetrum scilicet circuli, præter triplam, esse minorem septima longitudinis diametri. Exposita enim diametro septem partium, rectangulum comprehensum sub vndecim septimis diametri, & semidiametro est maius potentia circuli. Duo ergo ἀτοπήματα commisit. alterum, quod credidit cum Dinostrato τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου esse æquale rectangulo sub semidiametro, & semiperimetro concepto. alterum, quod, vt id tueretur, pronunciauit perimetrum circuli, cuius diametrus esset septem partium, minorem fore viginti duabus septimis. quo facto meruit, vt ab Orontio diuinus, & humano maior vocaretur. Sed nescit, quid dicat. Si quisquam diuini ingenij Archimedis admirator & studiosus, is ego sum. Sed caueant adolescentes à scopulis τῶν εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῶν eius. Suspectus enim est. Et sanè absurdissima non pauca eius errata deprehendimus: quod commodiore & tempore & loco dici potest. Cæterum τεμαχισμὸς ille circuli (nemo grauetur hoc verbum) quo videtur vsus Archimedes, quamuis proxime absit à vero, multum recedit à principiis Geometriæ. Non enim, si circino aliquam magnitudinem alicui magnitudini æqualem deprehendero, continuo sequitur, eam illi magnitudini æqualem esse. Id enim verum esse incredulus inficiabor, si ἐπιστημονικῶς demonstrari non potest. Nam media proportionalis inter semidiametrum, & $\frac{11}{14}$ diametri τῷ ἐμβαδῷ τοῦ κύκλου æqualis esse videtur: cum tamen non sit. Rursus quidam ἀγεωμέτρητοι superiore memoria pronunciarunt semilatus Trigoni isopleuri circulo inscripti esse latus Heptagoni eidem circulo inscribendi. Sane ita videtur conuenire, vt si aliter nos vindicare non possumus, manus dandæ sint. Sed nos incommensurabile esse diametro

ostendere possumus, cum diametrus tamen sit potentia commensurabilis lateri isopleuri. Quare cum eiusmodi magnitudines pro veris accipimus, quia demonstrare non possumus, decoquimus nomen nostrum, & frontem perfricamus, aliqua impudenti reductione ad impossibile nos strenue liberantes. In quo Archimedes adeo creber est, vt non regnum in Geometria obtinere, sed tyrannidem exercere videatur. Quare, vt toties monuimus, non pauca ab eo falso collecta sunt. Eiusmodi paralogismata ψευδάρια vocabat Euclides, cuius librum περὶ ψευδαρίων inuidit nobis iniuria temporis. Vno exemplo & mentem meam assequeris, & ἀπὸ τῶν ψευδαρίων cauere potes. Circuli ABCD diametrus BD sit expositarum partium XVI: quam rursus diametrus AC secet normaliter. Semidiametro ED in puncto F bifariam secta, iungatur recta FA: cui æqualis abscindatur ex longitudine FB, recta FG. Manifestum est ex hypothesi, qualium XVI. est longitudo BD, talium XIII esse DG, & IX longitudinem FG. Sed quanuis recta FA videtur tangere fines puncti G, imo nemo rem propius putabit, qui non dicat G esse in XIII sectione diametri: tamen longe aliter res habet. Quadratum EA est quadruplum quadrati EF. Ergo per XLVII. primi, quadratum FA est quintuplum quadrati EF. Quadrata igitur EF, FA rationem inter sese habent, quam numerus ad numerum: & propterea commensurabilia sunt, per V decimi. Sed quinque ad vnitatem rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo quadratorum EF, FA latera sunt incommensurabilia, per postremam partem IX eiusdem. Longitudo autem EF expositæ ῥητῇ BD est commensurabilis. Ergo longitudo FA eidem BD erit incommensurabilis, per XIIII decimi. FA igitur rectæ BD, aut rectæ EF, id est rectæ FD, est potentia



tentia tantum commensurabilis. Quare recta F A, vel F G, cum recta F D composita faciet binominem, per XXXVII eiusdem: & propterea tota G D irrationalis erit, per eandem. D G igitur aut non peruenit ad ῥητὸν terminum G, aut excessit. Sed non peruenisse ita demonstrabitur. Rectæ G D inæqualiter sectæ in E minus segmentum G E potest quintuplum E F dimidiæ partis ex maiore segmento E D. Quare per conuersam III tertij decimi Elementi demonstratam à Campano, tota G D secta erit extrema ac media ratione in E: cuius maius quidem segmentum E D est ῥητόν: quadratum autem ab eo æquale rectangulo sub tota G D, & minore segmento G E. Est autem quadratum ex E D talium 64, qualium 256 quadratum à tota B D, ex hypothesi. Quod si tota G D præcise esset XIII, qualium XVI est tota diametrus B D, rectangulum sub G D, G E esset 65, quod est maius quadrato E D: & contra definit. III sexti. Ergo G D minor est, quam $\frac{13}{16}$ longitudinis diametri. Et tamen qui nesciret hæc ἐπιστημονικῶς & γεωμετρικῶς θεωρεῖν, nesciret dignoscere rectangulum sub G D, G E à rectangulo sub $\frac{13}{16}$ longitudinis diametri & $\frac{5}{16}$ eiusdem. Sic magnus Archimedes, cum τεμαχισμὸν Antiphontis sequeretur, non multum aberrauit quidem à vero: sed cum Chrysippo dicendum est, tantum abesse à vero, quantum si longius abfuisset. imo tametsi rem tetigisset, neque demonstrare posset, perinde esset, ac si non inuenisset: cum Mathematici sit rem prius in intellectu habere, quam in materia. Prius enim ordine est, τὸ θεωρεῖν, posterius τὸ χειρουργεῖν. Archimedes igitur reuocato in vsum Antiphontis epichiremate non potuit dignoscere, longior, an breuior esset potentia, quam ex triangulorum velut quodam minutali concinnasset. Quare puto eo nomine à Nicomede reprehensum fuisse, vtpote quem ratio de modo perimetri ab Archimede adducta forsitan in eius sententiam perducere potuit. Itaque intermortuam Dinostrati τῆς τετραγωνιζούσης memoriam suscitauit. quod tamen quomodo facere potuerit, non video, cum eius lineæ construendæ nondum ratio

inita eſſet. Itaque cum tot ex veteribus eximij viri id ſaxum volutauerint, vnius tantum Archimedis, propter eius celebritatem, ratio habita eſt, ita vt eius liber ſuperſit, reliquorum epichiremata ac demonſtrationes interciderint. Secundum Nicomedem an ex veteribus alius idem perſecutus ſit, nihildum certi legimus. Non dubito tamen, quin ad Arabes pruritus ille peruenerit, quæ fuit eius gentis in Geometricis ſolertia. Sed memoria proauorum Nicolaus de Cuſa, & Iohannes Regiomonte viſi ſunt veterum induſtriam prouocaſſe. Non tamẽ felicior fuit eorum conatus, quam Orontij, & aliorum, qui memoria noſtra idem auſi ſunt, qui plus laborarunt, quam promouerunt: quia numeris totum negotium quadrationis ſubiiciunt: à quibus res ipſa plane aliena eſt, cum τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ſit ἄλογον μέγεθος, & Geometrice non arithmetice, explicari poſſit. Nam poſt multa laborum tædia exhauſta, nihil aliud ex cruce illa aſſequuntur, quam vt rem diligentius quidem, quam alij, æquè autem infeliciter ac illi, inueſtigaſſe videantur. Tamen tantum abeſt, vt vituperandi ſint, vt potius magnam laudem mereantur, quod vnuſquiſque eorum, vt ſuperiores vinceret, noua inuenta ad id adtulerit, & Geometriam multis acceſſionibus epichirematum locupletarit. Neque omnibus illis tam veteribus, quam recentioribus fraudi fuit, non aſſecutos fuiſſe id, quod aggreſſi eſſent: imo laudi, quod aggreſſi eſſent. Mihi vero, quantum video, aliter ſperandum eſt. Quantum enim, aut quid effecerim, nemo adhuc ſcit, & tamen iandudum magna inuidia flagramus, ex quo maleuolorum naribus labores noſtri oboluerunt: & ne ex eo, quod effeci, laudem vllam ſperem, ex eo, quod facere volui, magna mihi infamia comparatur. Tanta eſt inuidiæ cæcitas, vt non me pugnantem ſpectare ſuſtineant, ſed ante pugnam victum prædicent. Sed quinam ſunt iſti? qui negant ſpatio ſpatium rectilineum æquale dari poſſe: & quod ab antiquis fieri non potuit, ab aliis deſperandum eſſe. Satis huius iudicij ſui mihi ſupplicium dant, quod,

quod,cum ita sentiunt,neque vt Geometræ pronunciant,neque vt Dialectici colligunt. Quem postea fructum temeritatis suæ, & inuidiæ percepturi sint,totũ arbitrij tui facio,candide Lector. Mihi satis est,quod à me omnem ἀλαζονείας suspitionem amolitur primum res ipsa,quam summi Dei beneficio,effecimus,contra quam putant isti summi Geometræ: deinde exemplum antiquorum,qui,vt ait Philoponus ἐν ὑστέροις, nunquam id aggressi fuissent,nisi πόριμον iudicassent. Accipe ergo breuiter rationem instituti nostri. Habes iam diuisionem totius κυκλομετρικῆς πραγματείας,in τὸ κυκλοπεριμετρικὸν,& τὸ κυκλοδυναμικόν. In priore parte ἐπιστημονικῶς demõstratur perimetri ad diametrum ratio,& quadrantis eius inuestigandi methodus,abiecta illa quadrataria Dinostrati linea,quam tamen valde illustrauimus,& quid sit,nunc primi ostendimus. Hinc & deprehendentur diuini Archimedis errores, & melius cõstruetur Canon sinuum , quam si statuas diametrum 120 partium, vt fecit Ptolemæus. Apud eum enim diametrus non est talium 120,qualium 360 est perimetrus: cum tamen tales partes diametri assumi deberẽt,quales fuerint ipsius perimetri. Sed Ptolemæus habuit rationem diametri,non quam habet ad perimetrum,sed quam habet ad subtendentem quancunque, siue latus polygoni circulo inscripti. quod tuo iudicio perpendendum relinquo. Rursus ad κυκλοπεριμετρικὴν pertinet Polygonorum æquilaterorũ in circulo inscriptio, hactenus tam ignorata,quam desiderata,quæ tota pendet à triangulis isoscelibus,quorum alteruter æqualium angulorum ad verticalem habeat rationem datam. Hoc inuentum & nobilissimum est, & tanti à nobis fit , vt non vereamur illud cum quadratione circuli contendere. Hinc quoq. pendet perimetri,aut in perimetro ipsa peripheriarum datarum in partes datas sectio. In Cyclodynamico,quod fecimus alteram partem cyclometrici,est ipsius circuli, & segmentorũ ipsius quadratio γεωμετρικῶς vtique, & κατὰ τὸν ἐπιστημονικὸν λόγον,non autem τεχνικῶς,vt Archimedes. Arithmetice enim locum hic non habet, In huius materiæ societatem sese offerunt

offerunt multa alia, quæ ſine circuli doctrina explicari non poſſunt: quales ſunt ſuperficies cylindricæ, conicæ, ſolidorum ſphæræ inſcriptorum, ἐλλείψεων, & ſimilia, ex quibus caſtigantur multa τοῦ θαυμασίου ἀρχιμήδους errata. Hæc omnia, candide Lector, optamus tibi vtilia fore. Si non, tu facies vtilia legendo. Vale. Lugduni Batauorum.

ΚΥΚΛΟΜΕΤΡΙΚΟΝ
ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ Α ΤΟ ΚΑΙ
ΚΥΚΛΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟΝ.

CYCLOMETRICVM ELEMENTVM
PRIVS, QVOD ET CYCLOPERIMETRICON
dicitur, siue De ambitu circuli.

ΟΡΟΙ.

Α.

ΠΕΛΕΚΥΣ ἑξαγώνου λέγεται, ὅταν ἐντὸς μὲν τοῦ τριγώνου ἰσοπλεύρου παρὰ δύο πλευρὰς αὐτοῦ δύο τμήματα ἑξαγώνου, ἐκτὸς δὲ παρὰ μίαν τὴν λοιπὴν ἓν τμῆμα παραβληθῇ, τὸ ἐναποληφθὲν χωρίον.

DEFINITIONES.

I.

SECVRICLA Hexagoni dicitur, quando intra Triangulum æquilaterum duo ſegmenta Hexagoni, extra verò ad reliquum latus vnum ſegmentum applicatum fuerit, interceptum id ſpatium.

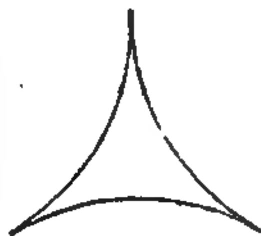


Β

Παραπλήρωμα δὲ τοῦ πελέκεως ἑξαγώνου καλείσθω, τὸ μεταξὺ τριῶν ἑξαγώνου τμημάτων τῶν ἐντὸς τοῦ τριγώνου ἰσοπλεύρου παρὰ τὰς τρεῖς αὐτοῦ πλευρὰς παραβληθέντων ἀπειληφθὲν χωρίον.

II.

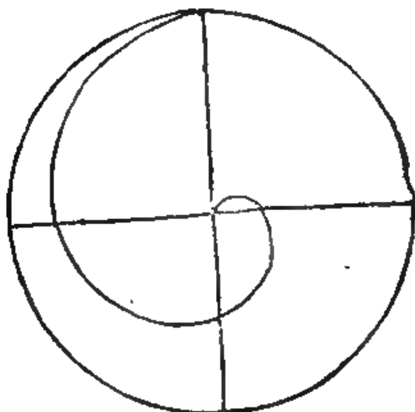
COMPLEMENTVM Securiclæ Hexagoni vocetur ſpatium interceptum inter tria Hexagoni ſegmenta intra triangulum æquilaterum lateribus ipſius applicata.

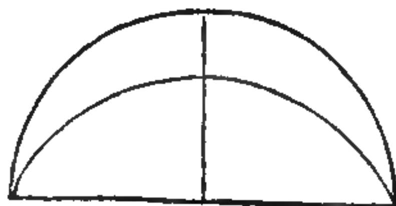


Γ.

Ὅταν τῆς τῶν τοῦ κύκλου τεταρτημορίων τετραχῶς διαιρεθείσης περιφερείας, ἐπὶ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν καθ' ὁμαλήν τινα αὐξομείωσιν ληφθῇ διαστήματά τινα, καὶ ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον κατὰ τὸ συνεχὲς περιφέρειαι ἀχθῶσι, τοιαύτη ἀνομοιομερὴς καὶ μικτὴ γραμμὴ καλεῖται ΕΛΙΞ, τεταγμένη μὲν ἡ Κόνωνος καὶ Ἀρχιμήδους, πᾶσιν ἐφεξῆς τοῖς ἐπὶ τῶν ἐκ κέντρου εὐθειῶν ληφθεῖσι διαστήμασι, συσταλουμένη δὲ ἡ Δεινοστράτου, μόνῳ τῷ τοῦ κύκλου διαστήματι κυκλωθεῖσα.

III.





Quoties peripheriis quadrantum circuli quadrifariam diuiſis quædam interualla in rectis à centro ad ſigna cõnexis ſumpta fuerint per æqualia incrementa, & decrementa, à ſigno autem ad ſignum peripheriæ in continuum ductæ: eiuſcemodi diſſimilaris, & mixta linea VOLVTA dicitur, ordinata quidem Cononis

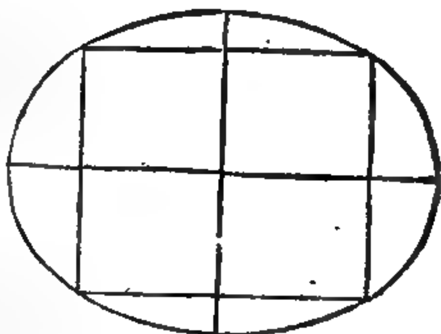
ſtonis, & Archimedis, omnibus per conſequentiam, quæ in ſemidiametris ſumpta ſunt, interuallis: delumbata autem ſiue luxata Dinoſtrati, ſolo circuli interuallo decircinata.

Δ.

Ἐὰν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ἑτερομήκους ὀρθογωνίου τῶν μὲν δύο ἐλασσόνων δύο τμήματα τριγώνου ἰσοπλεύρου, ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν δύο, τμήματα δύο ἑξαγώνου ἁρμοζόμενα τὸ ὅλον σχῆμα κυκλοειδὲς ποιῶσιν, ΕΛΛΕΙΨΙΟΕΙΔΕΣ καλείσθω.

IIII.

Si ſuper lateribus oblongi rectanguli duobus quidem minoribus duo ſegmenta Trianguli iſopleuri, ſuper reliquis autem duobus duo ſegmenta Hexagoni accõmodata figuram totam circularem componant, vocetur ELLIPSIODES.



E.

Τὸν κύκλον τετραγωνίζειν, ἐστὶ τῷ τοῦ κύκλου χωρίῳ, ἤτοι ἐμβαδῷ, ἴσον εὐθύγραμμον εὑρεῖν.

V.

Circulum quadrare, eſt circuli areæ æquale rectilineum inuenire.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

Α.

Ἠτήσθω λαβεῖν τὸ μῆκος, ὅ,τι ἀπὸ εὐθείας ἀπείρου κύκλος ἀποτέμνεται, ἀπὸ τοῦ ἐν αὐτῷ σημείου, ἀφ' οὗπερ κινεῖσθαι ἐπ' αὐτοῦ ἤρξατο, ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθείς.

POSTVLATA.

I.

Impetrandum ſit, ſumere longitudinem, quam à recta interminata circulus abſcindit, à ſigno, quod in ea eſt, à quo ſuper ipſa moueri cæperat ad idem reuolutus.



B.

Επι τῶν ςερεῶν τὰς ἐπιφανείας λαβεῖν.

I I.

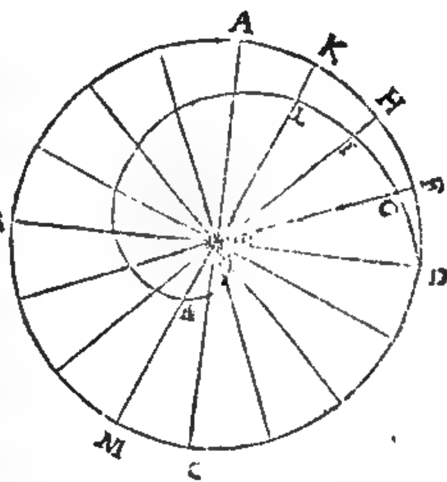
Præterea ſolidorum ſuperficies ſumere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α. Πρόβλημα.

Περὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην Ελικα τεταγμένην γράψαι.

PROPOSITIO I. Problema.

Circa datam rectam terminatam Volutam luxatam deſcribere.



CIRCA *rectam datam terminatam* BD *bifariam diuiſam in* E *deſcriptus eſto circulus* ABCD: *cuius quadrantibus peripheriæ diuiſis quadrifariam, erit tota peripheria* ABCD *diuiſa in partes* XVI, *quales ſunt* DF, FH, HK, *&* *ita deinceps: ad quarum ſectionum ſigna connexis rectis è centro* E, *totus circulus diuiſus erit in* XVI *ſcalpra. Jam ſi per æqualia incrementa, &* *decrementa in ipſis connexis lineis ſpatia ſu-*

mantur

mantur, per definitionem III, *poterit quædam Helix circa ipsa describi spatia. Si igitur recta* ED, *centro* E *manente immobili,* D *signum intelligatur in temporis æquabili spatio similes partes aut similia interualla moueri in recta* ED, *quot partes aut interualla idem* D *percurrit in peripheria* DABC: *sane quando* D *à sexdecim partibus peripheriæ* ABCD *abstulerit vnam, eodem tempore idem* D *à recta* ED *totidem partes abstulerit. Consequenter cum à peripheria duæ sextadecimæ ablatæ fuerint, totidem à recta* ED *abstulerit signum* D. *Sit* d *æqualis ipsi* ED *diuisa in sexdecim æquales partes, per* IX *sexti. A recta igitur* EF *auferatur* GF, *vna videlicet sextadecima rectæ* d, *per* III *primi. Eodem modo ab* EH *auferantur* IH *duæ sextadecimæ, nempe* LK: *& ita deinceps decrescendo. Manifestum est, eodem tempore* D *percurrisse omnes sextasdecimas rectæ* ED, *in quo tot similes partes percurrerit in peripheria* ABCD: *ac per* XV *quinti elementi, cum percurrerit peripheriam* DF, *percurrerit quoque interuallum* GF *in recta* ED: *cum autem peripheriam* DFG *peregerit, vna quoque opera peregerit interuallum* IH *in eadem recta* ED: *denique cum totam peripheriam* ABCD *per incrementa sextarumdecimarum absoluerit, idem fecerit quoque in rectis adiunctis, per interualla conuenientia. Quare erunt interualla per incrementa & decrementa in lineis adiunctis sumpta, quod Græci dicunt, κατ' αὐξομένων. Habemus igitur interualla, à quorum signis peripheriæ continuari possunt, per definitionem* III. *Sumpto igitur interuallo* DG, *tanquam basi, super ipsa basi intelligatur situm triangulum isosceles, cuius vnum crus sit æquale quindecim sextisdecimis rectæ* d, *nempe ipsi* EG. *Et centro quidem vertice ipsius trianguli isoscelis, interuallo autem ipsa* EG, *describatur peripheria* GD. *Eodem modo super basi* IG *triangulo isoscele constituto, cuius latus sit æquale* XIIII *sextisdecimis sumptis ex recta* d, *id est sit æquale rectæ* EI, *centro vertice eius trianguli, interuallo autem ipsa* EI, *describatur peripheria* IG. *& ita deinceps, donec ad centrum* E *peruentum fuerit: quod quidem centrum Archimedes principium vocat,* D *autem finem, respectu*

 scilicet

ſcilicet motus, quo mouetur punctum D *in recta* ED, *in centro immobili* E. *Quod erat faciendum.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.

LONGE ab hac Archimedea differt voluta Vitruuij Ionica. Nam hæc Archimedis intra circulum conſtituitur: Ionica autem à circello, quem oculum volutæ vocat Vitruuius, extra tota eiicitur. Hoc tamen commune habent, quod æquabilibus ſpatiorum contractionibus, item quadrantibus circulorum, quas ipſe tetrantationes vocat, deſcriptæ ſint. Locus apud Vitruuium ſanus non eſt, neque ipſis ſummis viris, niſi palpabundis, cognitus.

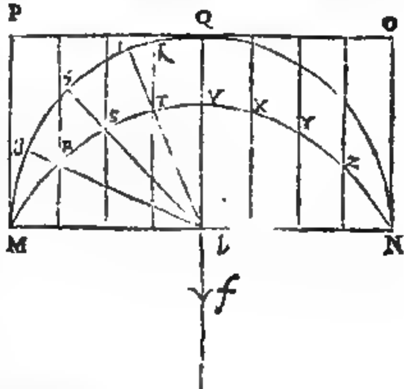
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β. Πρόβλημα.

Περὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην Ελικα σεσαλευμένην γράψαι.

PROPOSITIO II. Problema.

Circa datam rectam terminatam Volutam luxatam deſcribere.

CIRCA *datam rectam* MN *deſcripto ſemicirculo* MQN, *& rectangulo* MO *ſuper eadem conſtituto, erunt* MQ, bO *quadrata, quod* bM, bQ, bN *ſint æquales ex definitione circuli. Diuiſo quadrante circuli* MhQ *quadrifariam, adiunctiſque ex centro rectis* bg, bh, bi, *poſſunt in ipſis ſumi interualla κατ' αὐξομένων, & conſequenter à ſigno ad ſignum peripheriæ continuari per* III *definitionem. Recta* bM, *manente immobili centro* b, *intelligatur moueri per quadrantem* MhQ: *interea autem moueatur recta* MP *æquabiliter eodem & æquali temporis interuallo, deſcendens per parallelas* bM, QP. *Oportet igitur, vt eodem tempore recta* MP *per parallelas* bM, QP *tot partes peregerit, quot recta* bM *in peripheria* MhQ. *Quadrifariam igitur diuidenda erit æque, ac ipſa peripheria. Igitur cum* M *limes rectæ* bM *peruenerit ad* g, *recta* MP *æquabiliter per parallelas deſcendens*



ſcendens ſignabit rectam b M, *id eſt rectas ei æquales* b g, b h, b i, *in punctis* R, S, T. *Sectis rectis* b N, Q O *quadrifariam, recta adiuncta ſectionum ſignis ſecentur etiam in punctis* X, Y, Z, *eadem vtiq. ratione, qua reliqua quadrati* b P. *Deinde quemadmodum antea in ordinata Helice, baſi* M R *conſtituto triangulo iſoſcele, cuius alterutrum crus ſit æquale ſemidiametro* b M: *centro vertice ipſius trianguli, interuallo autem recta* b M, *deſcribatur peripheria* M R: *& ſimiliter reliquæ peripheriæ eodem interuallo continuentur ſuper baſibus* X Y, Y Z, Z N. *Quare neceſſario eueniet, vt trianguli iſoſcelis ſuper baſi* T, X *conſtituti vertex ſit in ſemidiametro producta in puncto* f: *ita vt non à ſigno* T, *in ſignum* V, *& ab* V, *in* T, *ſed à* T *in* X *per punctum* V *continuanda ſit peripheria* T V X. *Ergo* V *eſt finis volutæ Dinoſtrati* M R S T V, *aut ipſius* N Z Y X V. *Quæ nihil aliud eſt, quam dimidium volutæ delumbatæ. Quod erat faciendum.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.

IGITVR munita eſt nobis via finem volutæ Dinoſtrateæ deprehendendi, quod tamen fieri poſſe negabat Sporus Nicenus. Nam ex peripheria quadrantis Q h M abſciſſa quarta parte Q I, & recta T adiuncta ad ſigna quadrifariæ ſectionis in parellelis b M, Q P, à ſigno ſectionis ambarum T, in ſignum f, diuaricetur circinus interuallo ſemidiametri b Q. & centro F deſcribatur peripheria T V X. &c.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ. Θεώρημα.

Τῆς ἐκ τοῦ κέντρου διαιρεθείσης ὑπὸ τοῦ τῆς σεσαλευμένης ἕλικος πέρατος τὸ ἔλασσον τμῆμα ἐστὶν ἄλογος γραμμὴ ἡ λεγομένη ἀποτομή.

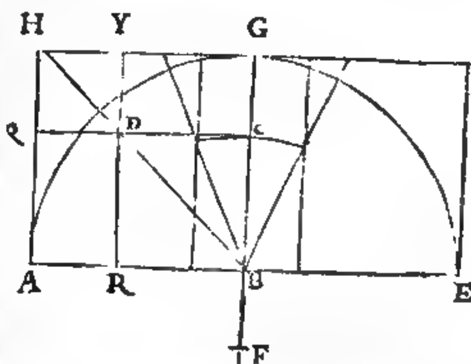
PROPOSITIO III. Theorema.

Semidiametri diuiſi per limitem volutæ luxatæ minus ſegmentum eſt linea irrationalis, quæ dicitur Apotome.

Semidiametri B G *in ſemicirculo* A G E *diuiſa inæqualiter in puncto* C, *per finem volutæ delumbatæ, ex*

antece-

antecedente Scholio, minus segmentum esto CG. *Aio ipsum segmentum* CG *esse lineam irrationalem, quæ dicitur Apotome. Absoluto rectangulo* EH, *erit* AG *quadratum. Agatur diagonia* BH. *Producta semidiametro* GB *in partes* F, *esto* BF *æqualis duabus quintis ablatis ex* BG, *per* IX *sexti. ex recta autem* BA *abscindatur* BR *æqualis mediæ proportionali inter* BF, BG, *per* XIII *sexti. Sunt vero rectæ* BF, BG, *ex constructione, longitudine commensurabiles. Ergo recta* BR *est ipsis*



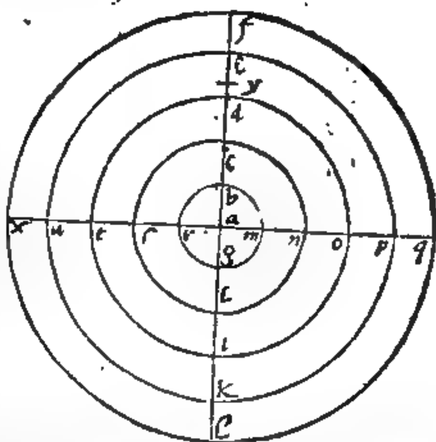
commensurabilis, vtpote cum sit potentia ῥητή, per XX *decimi. Sed quia vt longitudo* BF *ad longitudinem* BG, *ita potentia* BF *ad potentiam* BR, *&* *potentia* BR *ad potentiam* BG, *id est* BA, *per Coroll.* XX *sexti: est autem* BF *ad* BG, *vt duo ad quinque, ex constructione, hoc est, vt numerus quadratus ad numerum non quadratum: Ergo & quadratum* BF *ad quadratum* BR, *& quadratum* BR *ad quadratum* BG, *id est,* BA, *rationem habent, quam numerus non quadratus ad numerum non quadratum. Igitur per finalem partem* IX *decimi, quadratorum illorum latera* BF, BR, BA *sunt longitudine inter se incommensurabilia, & ideo tantum potentia commensurabilia. Cum igitur* BA *sit ῥητὴ longitudo (esto enim expositarum partium quinque, vt iam dictum est)* BR *autem sit eidem* BA *ostensa longitudine incommensurabilis, potentia vero tantum commensurabilis: erit* BR *Apotome, per* LXXIIII *decimi. A signis* C, R *agantur rectæ* CQ, RY *rectis* AB, AH *parallelæ, occurrentes rectis* HA, HG *in punctis* Q, Y, *secantes se in puncto* D. *Quare* CD, BR, *item* BC, RD *erunt æquales ex constructione, adiuuantibus nempe* XXXIII, XXXIIII *primi. Sed angulus* CBD *in triangulo* DCB *est semirectus, propter diagoniam* BH, *in quadrato* AHGB, *per* XXXIIII *primi. item angulus* C *rectus ex constructione. Quare reliquus* CDB *est semirectus, per* XXXII *primi, ac per sextam eiusdem latera* CD, CB *æqualia. Sed* CD *iam erat æquale ipsi* BR. *Duæ igitur* CB, BR *eidem*

CB *sunt*

CB *sunt æquales. Inter se igitur erunt æquales, per primum Pronunciatum. Et proinde rectangulum* BD *est quadratum circa diametrum* BA *in quadrato* ABGH. *Quare &* DH *erit quadratum circa eandem diametrum, per* XXIIII *sexti. Sed* BR *ex* BA, *hoc est* BG, *abscindit Apotomen. Erit igitur* CG *illi æqualis Apotome. Quod erat demonstrandum.*

ALITER.

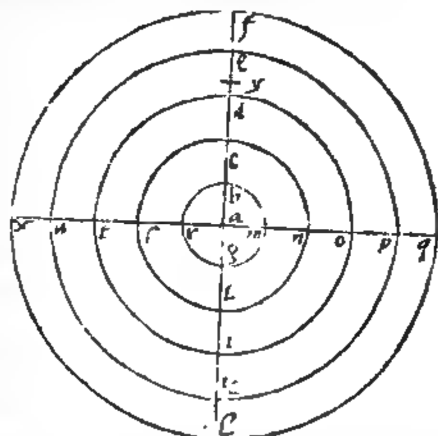
ESTO *circulus* fxlq, *cuius centrum* a, *diametrus* fl, *descriptus interuallo recta* af, *quæ sit æqualis rectæ* BG, *sitque secta in* y, *in rationem segmenti* BC *ad totam* BG. *& propterea recta* ay *est æqualis ipsi* BC. *Erit ergo* ay πέρας τοῦ ἕλικος. *Secta semidiametro quintufariam in signis* b, c, d, e, *centro eodem* a, *interuallo* ab, bc,



cd, de, *describantur circuli, qui quidem erunt paralleli, quorum diametri excedunt sese excessu æquabili, nempe interuallo semidiametri* ab, *quæ minima est diametrorum. Secet diametrus* xq *diametrum priorem* fl *normaliter. Qualium duum est longitudo* ab, *talium decem est longitudo* af. *& propterea quadrata ab omnibus diametris sunt inter se commensurabilia, per* VIII, *&* IX *definit. decimi. Ergo & omnes circuli erunt inter se commensurabiles, per* II *duodecimi. quin & peripheriæ erunt commensurabiles. Nam circulus* fxlq, *ad circulum* brgm, *est vt quadratum* lf *ad quadratum* gb: *hoc est, vice quintuplus est ipsius circuli* brgm, *cum longitudo* fl *longitudinis* gb *sit quintupla, & peripheria* fxlq *peripheriæ* brgm *erit quintupla. Quia igitur vt* bg *ad* lf, *ita* fqlx *ad* bmgr, *& vt* fl *ad* bg, *ita* af, *ad* ab, *per* XV *quinti: ergo per* XI *eiusdem, erit vt* af *ad* ab, *ita* fqlx *ad* bmgr. *Sed per eandem* XV, *vt est* fqlx *ad* bmgr, *ita peripheria* fq *ad peripheriam* bm. *Ergo vt* af *ad* ab, *ita peripheria* fq *ad peripheriam*

riam

riam bm. *Eodem modo possumus demonstrare peripheriam* nc *ad peripheriam* qf *esse, ut* ac *ad* af *& ἐναλλὰξ, ut* nc *ad* ac, *ita* qf *ad* af, *& ἀνάπαλιν, ut* ac *ad* nc, *ita* af *ad* qf. *Sed ut* af *ad* qf, *ita ex hypothesi Dinostrati, hoc est ex natura ipsius voluta delumbata, erit* ay *ad* af. *Ergo per* XI *quinti, ut* ac *ad* nc, *ita* ay *ad* af. *Et quia erat ut* ac *ad* af, *id est, ut duo ad quinque, ita* nc *ad* qf: *erit* nc *ad* qf, *ut duo ad quinque. Rursus rectangulum sub* ac, af *ad quadratum* af *est, ut* 40 *ad* 100, *id est, ut duo ad quinque. Ergo quadratum* af *applicatum ad quinque maiora, quam est longitudo* af, *faciet latitudinem duo ipsis quinque commensurabilia, per* XXI *decimi. Sed idem quadratum* af *ad* qf, *qua est maior, quam longitudo* af, *applicatum, facit latitudinem segmentum* ay, *per hypothesim Dinostrati, hoc est per ipsam naturam voluta. Ergo* ay *sunt duo commensurabilia ipsis quinque* qf. *Igitur* ay *&* nc *ambo sunt dua quinta de quinque partibus ipsius* qf. *Quare per* VII *pronunciatum* ay *&* nc *sunt aequalia. Et quia erat ut* ac *ad* nc, *ita* ay *ad* af: *erit ut* ac *ad* ay, *ita* ay *ad* af. *Et propterea* ay, *id est* BC, *est media proportionalis inter* af, *id est ei aequalem semidiametrum* BG, *&* ac, *id est duas quintas ipsius* af, *vel ipsius* BG *illi aequalis. Reliqua ut supra, &c. Quod erat demonstrandum.*



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου περιφέρειάν τινα δίχα τέμῃ, καὶ τὴν ὑπ' αὐτὴν ὑποτείνουσαν δίχα τεμεῖ. καὶ ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα ὑπὸ περιφέρειάν τινα ὑποτείνουσαν δίχα τέμῃ, καὶ ἐκβαλλομένη αὐτὴ περιφέρειαν αὐτὴν δίχα τεμεῖ.

PROPO-

PROPOSITIO IIII. Theorema.

Si in circulo recta quædam per centrum acta peripheriam quandam bifariam secuerit, etiam rectam, quæ eam subtendit, bifariam secabit. Et si in circulo recta quædam per cẽtrum acta rectam quandam, quæ peripheriam quandam subtendit, bifariam secuerit, ea producta etiam peripheriam ipsam bifariam secabit.

In circulo AHBC, *cuius centrum* F, *peripheriam* HAB, *quam subtendit recta* AB, *secet bifariam recta* FH. *Aio etiam subtendentem* AB *ab eadem* FH *secari bifariam. Connectatur recta* FB. *Cum peripheria* BH, HA, *ex hypothesi sint æquales, erunt & anguli* BFH, AFH *æquales, per* XXVI, *aut* XXVII *tertij. Rursus cum latera* FI, FB *trianguli* FIB *sint æqualia lateribus* FI, FA *trianguli* FIA, *& anguli illis contenti æquales: erit & basis* IB *basi* IA *æqualis, per* IIII *primi. Bifariam igitur diuisa est recta* BA *in puncto* I, *à recta* FI. *Quod erat prius.*

Rursus secet bifariam recta FI *rectam* AB. *Erunt igitur anguli ad* I *recti, per* III *tertij. Aio peripheriam* AHB, *quæ ab ea subtenditur, ab eadem* FI *producta ad* H, *bifariam quoque secari. Cum enim latera* IB, IF *trianguli* IFB *sint æqualia lateribus* IA, IF *trianguli* IFA, *& anguli contenti sub iis æquales, erunt anguli* IFB, IFA, *vel* AFH, BFH *æquales. Quare per* XXVI *tertij peripheria* HB, HA *sunt æquales. Peripheria igitur* AHB *bifariam secatur in* H *à recta ipsam subtendentem* AB *bifariam secante in* I. *Quod erat posterius. Igitur si in circulo, &c. Quod erat demonstrandum.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.

PRIOR pars hujus Theorematis constat etiam ex x tertiidecimi Elementi: in qua demonstratur, rectam ex centro, quæ peripheriam Pentagoni bifariam secat,

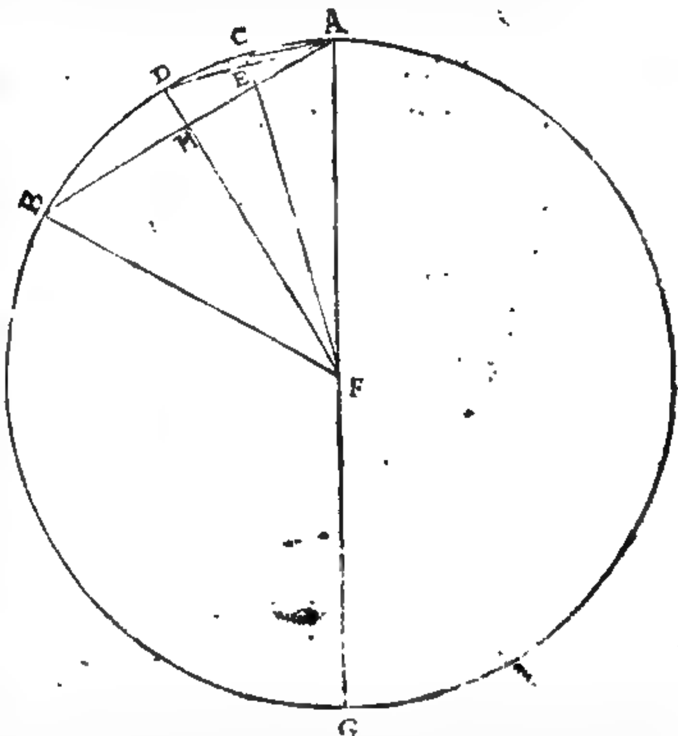
etiam latus ipſius pentagoni, quod eam ſubtendit, bifariam ſecare. Idem etiam aliter demonſtrat Hypſicles Alexandrinus propoſitione prima prioris Elementi ſui τῆς συγκρίσεως δωδεκαέδρου καὶ εἰκοσαέδρου: quod eſt ordine quartumdecimum Elementum Geometricum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε. Θεώρημα.

Ἡ τοῦ δωδεκαγώνου περίμετρος τοῦ εἰς κύκλον ἐγγραφομένου μεῖζον δύναται τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου. Καὶ ὅσῳ ἐφεξῆς πλειόνων πλευρῶν γένηται τὸ πολύγωνον, τὸ εἰς κύκλον ἐγγραφόμενον, τοσούτῳ ἡ τοῦ πολυγώνου περίμετρος μεῖζον τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου δυνήσεται.

PROPOSITIO V. Theorema.

Ambitus Dodecagoni circulo inſcribendi plus poteſt, quam circuli ambitus. Et quanto deinceps plurium laterum fuerit Polygonum circulo inſcribendum, tanto plus poterit ambitus Polygoni, quam ambitus circuli.

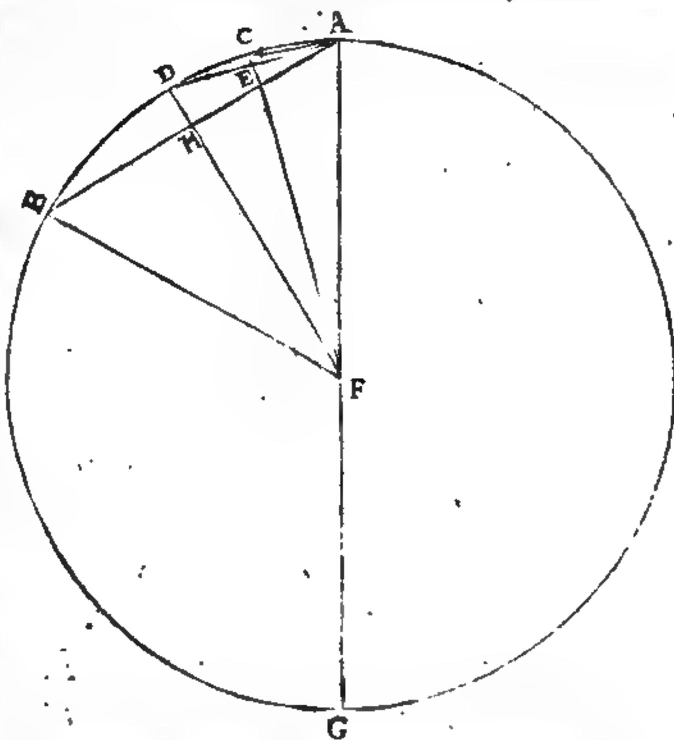


Oſtendendum eſt, maiorē eſſe potentiam ambitus Polygonorum circulo inſcriptorum à Dodecagono deinceps, quam ſit potentia ambitus circuli. Et quia conſtat perimetrum circuli eſſe minorem vnius & quinquaginta ſextarum decimarum diametri (ſane Archimedes ponit minorem, quam $\frac{50}{16}\,\frac{2}{7}$ diametri) nos quoque ponamus eam non excedere $\frac{51}{16}$ longitudinis diametri. Si enim diametrus fuerit expoſitarum partium XVI, *vna ſeptima erit minor quam $\frac{3}{16}$. Proinde triplum longitudinis diametri cum $\frac{3}{16}$, hoc eſt $\frac{51}{16}$ lon-*

$\frac{51}{16}$ longitudinis diametri, erunt maiores, quam perimetrus circuli. His ita positis, peripheria ACDBG *circuli* AG, *cuius centrum* F, *esto vicesima quarta pars* AC, *duodecima* ACD, *sexta* ACDB. *quas subtendant* AC, AED, AHB. *Connectantur recta* FB, FC, FD. *quarum* FC *secet rectam* AD *in* E. AB *autem secetur in* H *a recta* FD. *Et quidem peripheria* BDCA *peripheria* DCA, *& peripheria* DCA *peripheria* CA *dupla est. In circulo autem semper maior ratio est peripheria ad peripheriam, quam subtendentis ad subtendentem, vt demonstrat Ptolemaus libro primo magni operis. Ergo maior erit ratio peripheria* BDCA *ad peripheriam* DCA, *quam recta* BHA *ad rectam* DEA. *Proinde recta* BHA *ratio ad rectam* DEA *minor est dupla. Hoc est* DEA *potest plusquam dimidium* BHA. *Porro triangulum* FAB *est aquilaterum, per* XV *quarti, &* FH *secat* BHA *bifariam, per priorem partem antecedentis. ideo anguli ad* H *sunt recti, per* III *tertij, & recta* FH *est κάθετος. Per* XI *quartidecimi, ex traditione Campani, qualium quatuor erit potentia lateris* FB, *talium trium erit potentia τῆς καθέτου* FH. *Esto longitudo diametri* AG *expositarum partium* XVI. *Qualium igitur 64 erit potentia semidiametri* FA, *hoc est latus Trigoni isopleuri* FAB, *talium 48 erit ἡ κάθετος* FH. *Cuius latus fuerit 6 $\frac{12}{13}$ fere. Qua si de longitudine* FD *detrabantur, remanebit longitudo recta* HD 1 $\frac{1}{13}$ *fere, irrationalis linea, qua dicitur ἀποτομὴ, per* LXXIIII *decimi, vt supra etiam propositione* III *demonstratum est. Quia igitur recta* FD *peripheriam* BDCA *secans bifariam in* D, *subtendentem quoque* BA *bifariam secat in* H, *vt iam ostensum est, & angulus* DHA *est rectus: erit, per* XLVII *primi, quadratum* DA *quadratis* DH, HA *aquale. Et quia* DA *est latus Dodecagoni, ambitus Dodecagoni plus poterit, quam duodecies* HA, *hoc est, quam triplum diametri* AG, *duodecies qudrato* 1 $\frac{1}{13}$, *hoc est* 13 *integris fere potentialibus, quorum latus longe maius est, quam $\frac{3}{16}$ diametri. qua composita cum triplo longitudinis, maiora erunt, quam $\frac{51}{16}$ diametri. Maior est igitur ambitus dodecagoni, quam $\frac{51}{16}$ diametri: ideo longe maior, quam peripheria* ACDBG. *Rursus quadratum lateris* 1 $\frac{1}{13}$ *recta* HD *sunt $\frac{196}{169}$, qua composita cum quadrato*

 HA *effi-*

HA *efficient quadratum* DA $17\frac{47}{169}$, *per* XLVII *primi, quod angulus* DHA *sit rectus, vt iam ostensum est. Quadratum igitur* EA *est* $\frac{730}{169}$, *(nẽpe quarta pars quadrati* DA *dupla ipsius* EA*) Quadratum autem recta* CA, *plus potest, quam quadratum* EA, *quadrato* EC; *per eandem* XLVII *primi: quod scilicet recta* FC *peripheriã* DCA *bifariã in* C *diuidens, rectam quoq.* DA *bifariam diuidat in* E, *per*



antecedentem, & ideo ad angulos rectos. Triangulum itaque CEA *est orthogonium. Sed quadratum* EA *est* $\frac{719}{169}$. *cuius latus paulo maiusculum, quam* $2\frac{7}{13}$. *Quare vicesies quater plusquam* $2\frac{7}{13}$ *erunt plusquam, aut sane non minus, quam* $\frac{61}{16}$ *ambitus nempe* τοῦ τεσσαρεσ-καιεικοσιδεκαγώνου, *maior vtique ambitu circuli circumscribentis, qui tantum positus erat* $\frac{51}{16}$ *Et quo pluria fuerint latera polygoni, eo longe maior per numeros reperietur ambitu circuli circumscribentis ambitus polygoni inscripti. Quod erat demonstrandum.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.

CUM igitur, vt iam ostensum est, quo pluria fuerint latera Polygoni inscripti, eo maior reperitur per numeros ambitus eius, quam circuli circunscribentis peripheria: frustra per numeros Archimedes conatus est peripheriam circuli inuestigare in polygono permultorum laterum circulum circunscribente: cum polygonum circunscribens sit proculdubio longe maius polygono simili inscripto. quod quidem polygonum inscriptum ostensum est per numeros maiorem ambitum habere, circulo suo circunscribente. Maiorem igitur ambitum habebit polygonum circunscribens: & ideo latius peccatum ab eo.

Nobile est hoc paradoxon in Geometria, & ipsi, vt iam tetigimus, Archimedi non animaduersum. Alioquin non dubium est, quin peripheria sit maior subtendente sua. Sed per numeros aliter deprehendetur. quo magis miror Mechanicos,

qui

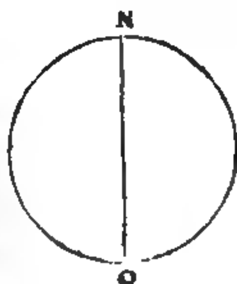
qui globis superficies Cosmographicas inducunt. Nam ad longitudinem perimetri circuli assumunt latera omnia, id est totum ambitum Dodecagoni maximo circulo sphæræ ipsius inscripti. Non enim video, quomodo perfecte id obire possint. & non leuiter miratus sum, cum hæc præcipi legissem à magno Daniele Barbaro. Nam de vulgo nihil mirum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ. Θεώρημα.

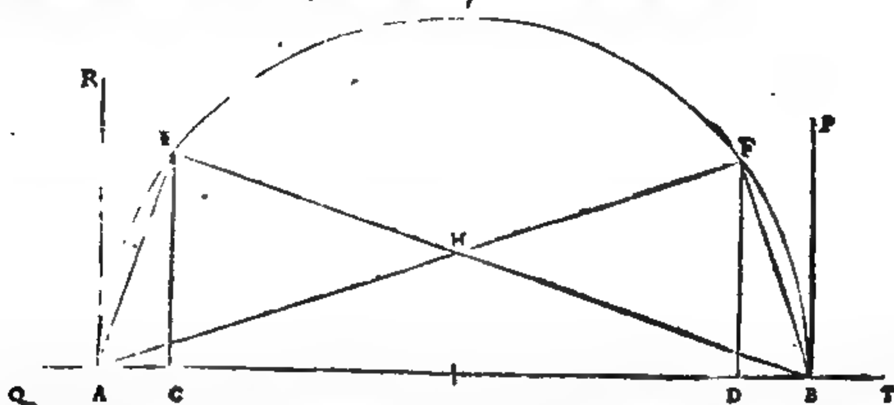
Ἡ τοῦ κύκλου περίμετρος διπλάσιον δύναται τῆς διαμέτρου.

PROPOSITIO VI. Theorema.

Quadratum ab ambitu circuli decuplum est quadrati à diametro.

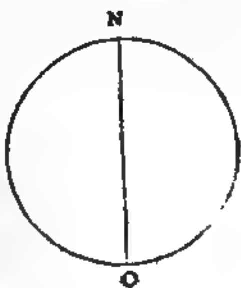


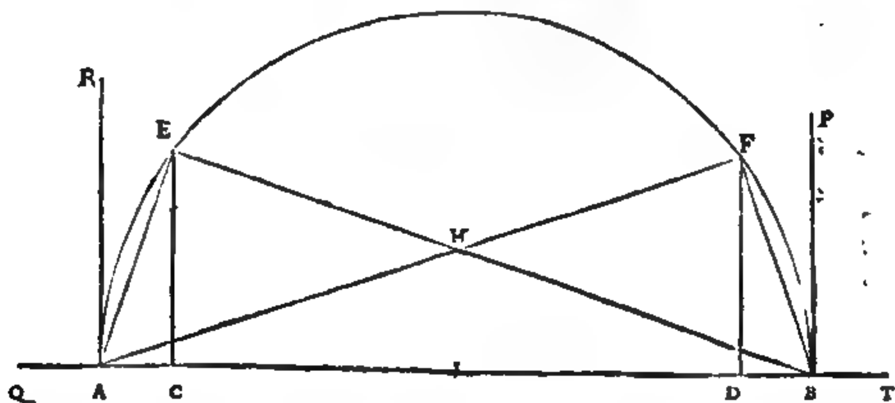
Circulus NO *abscindat de linea infinita* QT *rectam* AB, *incipiens super ea moueri ab eo puncto, quod in eo est, donec ad idem reuoluatur, per prius Postulatum huius. Recta igitur* AB *est æqualis perimetro eiusdem circuli propositi* NO. *Semicirculo* AEFB *super recta* AB *descripto accommodetur lon-*



gitudo EB *tripla longitudinis* NO, *per primam quarti. iungatur recta* EA. *Deinde à signo* E *demittatur recta* EC *perpendicularis ad* AB, *per* XII *primi. Rursus de eadem recta* AB *abscindatur pars decima* DB, *per* IX *sexti. Postremo à puncto* D *excitetur* DF *ipsi* AB *perpendicularis, per* XI *primi: & connectantur rectæ* FA, FB. *Per Coroll.* VIII *sexti recta* BF *est media proportionalis inter* AB, BD. *Ergo per Coroll.* XIX, *aut* XX *sexti, vt longitudo* AB *ad longitudinem* BD, *ita quadratum* AB *ad quadratum* BF. *Sed longitudo* AB *est de-*

est decupla longitudinis BD *ex constructione. Ergo quadratum* AB *est decuplum quadrati* BF. *Quare per* XLVII *primi, quadratum* AF *est nonuplum quadrati* BF. *hoc est, longitudo* AF *est tripla longitudinis* FB, *per* IX *decimi. His ita demonstratis, excitentur* AR, BP *perpendiculares ipsi* AB. *ac propterea parallelæ erunt rectis* CE, DF. *Itaque angulus* RAE *angulo* AEC: *& angulus* PBF *angulo* BFD *erunt æquales, vtpote alterni. Item anguli* EHA, FHB, *per* XV *primi æquales. In triangulis vero* EAH, FBH, *anguli* AEH, BFH, *æquales, quia*





recti sunt per XXXI *tertij. Igitur reliquus* EAH *reliquo* FBH *æqualis. Quibus ablatis ab æqualibus* RAB, PBA, *remanent* RAE, *hoc est*, AEC, FAB: *item* PBF, *id est* BFD, EBA, *æquales. Sed anguli* AEC, ABE *sunt æquales: item* BFD, FAB: *propterea quod triangula* AEC, AEB: *item* BFD, BFA *sunt æquangula, per* VIII *sexti. Quare* FAB, EBA *sunt æquales: quemadmodum etiam anguli* AEB, BFA, *in triangulis* ABE, BAF. *Reliquus ergo* EAB *reliquo* FBA *æqualis, & triangulum triangulo æquangulum. Cum igitur ambo triangula* ABE, BAF *habeant latus commune* AB *oppositum æqualibus angulis* AEB, BFA, *idemque adiacens æqualibus angulis* EAB, FBA: *ergo per* XXVI *primi, reliqua latera* AF, FB *reliquis lateribus* BE, EA *sunt æqualia. Sed longitudo* AF *est tripla longitudinis* FB, *ex constructione. Ergo consequenter* BE *tripla erit longitudinis* EA. *Atqui eadem* BE *est tripla longitudinis* NO, *ex constructione. Ergo per* IX *quinti*, AE, NO

sunt

sunt aequales. Ideo quadratum A B, *hoc est quadratum a peripheria circuli* N O, *est decuplum quadrati a diametro* N O. *Quod erat demonstrandum.*

ALITER.

Ea est natura voluta luxata, veluti demonstrauit Dinostratus, vt semidiametrus circuli sit media proportionalis inter maius segmentum, quod fit à fine volutae (quae vocatur cōgruens) & quadrantem perimetri circuli. Sed cōgruens ipsa ostensa est supra propositione III, *esse media proportionalis inter ipsam semidiametrum, & duas quintas eius. Esto circuli propositi* N O *diametrus expositarum partium viginti. Duae quintae semidiametri erunt quatuor decimae semidiametri. Quadratum vero rectanguli inter quatuor decimas & decem, erunt* 40, *qualium quadratum à semidiametro sunt* 100. *Nam ratio* τῶν 40 *ad* 100 *debet esse, qualis quatuor ad decem, aut duo ad quinque, per Coroll.* XIX, *aut* XX *sexti. Ergo tertia proportionalis erit* 250, *quadrans perimetri, decuplum potentiae quadrantis diametri. Quare sedecuplum ipsorum* 250 *erunt* 4000. *quae quidem sunt decupla ipsorum* 400, *qui est quadrans diametri circuli* N O *expositarum partium* X X. *Igitur quadratum à perimetro circuli est decuplum quadrati à diametro. Quod erat demonstrandum.*

ΠΟΡΙΣΜΑ. Α.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν, ὅτι ὁ λόγος, ὃν τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου ἔχει πρὸς τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου, τριπλασιεφεβδόμου μείζων ἐστί.

COROLLARIVM I.

Ex istis constat, quod ratio, quam habet longitudo ambitus circuli ad longitudinem dimetientis, maior est tripla sesquiseptima.

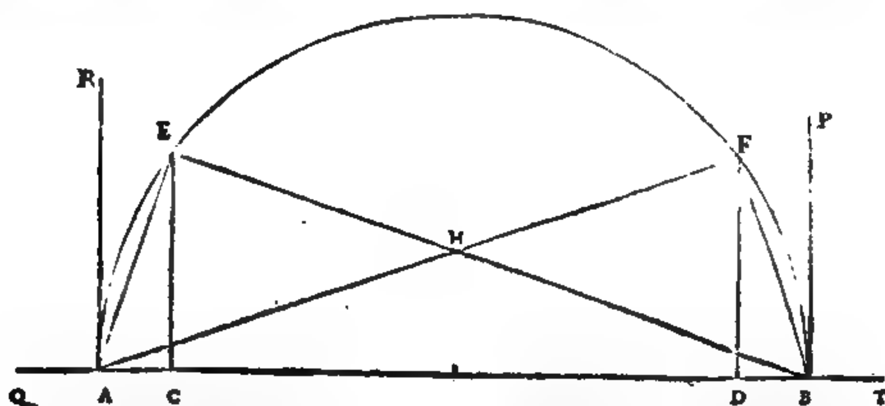
Nam si, verbi gratia, longitudo diametri fuerit septem partium: qualium potentia diametri fuerit 49, *talium* 490 *erit potentia perimetri: quae quidem maior est, quam* 484, *quae sunt tantum in ratione tripla sesquiseptima.*

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι ἐν τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, ἐὰν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθῇ, τὰ ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετράγωνα ἀλλήλοις ἐστὶν, ὥσπερ τὰ τῆς βάσεως τμήματα.

COROLLARIVM II.

Ex istis manifestum est, in triangulo rectangulo si à recto angulo ad basim perpendicularis acta sit, quadrata à lateribus rectum angulum continentibus inter se esse, perinde ac basis segmenta.



Nam priore demonstratione, in triangulo rectangulo AFB *ostensum est, quadratum ex* AF *quadrati ex* FB *esse nonuplum. Sed segmentum* AD *segmenti* DB *ex constructione erat nonuplum. Ergo quadrata à lateribus* FA, FB *angulum* F *continentibus quadrata perinde sunt inter se, ut longitudines* DA, DB. *Quod tamen aliter* ἐπιστημονικῶς *demonstrari potest. In Triangulo rectangulo* ABC, *à recto angulo* C, *ad basim* AB, *demissa perpendicularis* CD *secet basim ipsam in duo segmenta* DA, DB *Aio quadrata à rectis* CA, CB *rectum angulum continentibus inter se esse, ut longitudines* DA, DB, *quæ sunt segmenta basis* AB. *Per Coroll.* VIII *sexti, recta* AC *est media proportionalis inter* AB, AD: *recta au-*



Eta autem BC *inter eandem* AD, *&* DB. *Quare rectangulum sub* AB, AD *quadrato ex* AC: *rectangulum autem sub* AB, DB *quadrato ex* BC *sunt æqualia. Sed rectangula sub* AB, AD, *&* *sub eadem* AB, DB, *sunt inter se ut bases* DA, DB, *sub eadem altitudine* AB *per* 1 *sexti. Quare per* XI *quinti, quadrata* AB, BC, *æqualia ipsis rectangulis, sunt inter se, ut* DA, DB. *Quod erat demonstrandum.*

Possumus & hoc Πόρισμα *conuertere ita.*

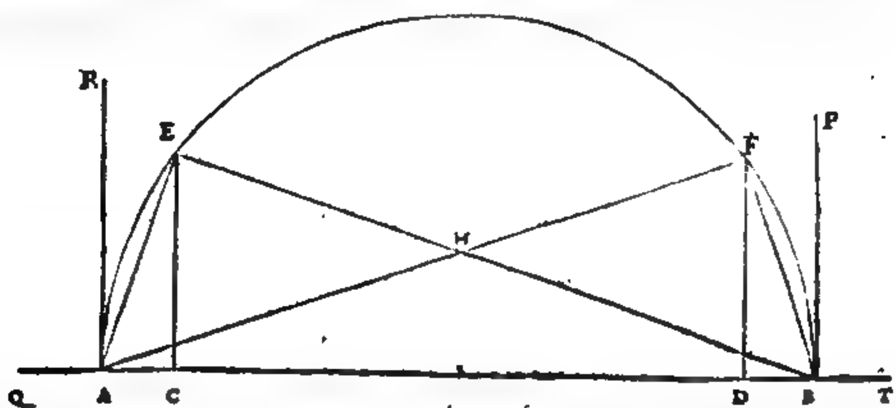
Ἐὰν τριγώνου γωνίαν τινὰ εὐθεῖα τέμνουσα καὶ τὴν βάσιν τέμῃ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν τὴν τμηθεῖσαν γωνίαν περιεχουσῶν γωνιῶν τετράγωνα ἀλλήλοις ᾖ, ὥσπερ τὰ βάσεως τμήματα, ἡ μὲν τέμνουσα εὐθεῖα τῇ βάσει πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ δὲ τμηθεῖσα γωνία, ὀρθή.

Si Trianguli angulum quendam ſecans recta linea ſecuerit & baſim, quadrata autem à lateribus angulum ſectum comprehendentibus inter ſe fuerint perinde ac baſis ſegmenta, ipſa quidem ſecans linea eſt baſi perpendicularis, angulus autem ſectus eſt rectus.

Priore figura, in triangulo AFB, *(conſideretur Triangulum* AFB *nudum, ſine reliquis, quæ ſunt in figura) recta* FD *ſecans angulum* F *ſecet & baſim* AB, *in* D: *quadrata autem à lateribus* FB, FA *angulum* F *continentibus, ſint inter ſe, ut ſegmenta* DA, DB *baſis* AB. *Aio rectam quidem* DF *baſi* AB *eſſe perpendicularem, angulum vero* F *eſſe rectum. Excitatis rectis* AR, BP, *quæ ſint ad perpendiculum baſi* AB, *imaginemur à puncto* F *anguli* AFB, *ad imaginaria puncta* q, m *in rectis* AR, BP *ſumpta, duas rectas* Fq, Fm *ipſis* DA, DB *tum parallelas tum æquales iunctas eſſe. Erunt* qA, mB *etiam tum parallelæ, tum æquales, per* XXXIII *primi. Quadrilatera vero* qADF, FDBm *erunt parallelogramma: &* *anguli ideo oppoſiti* qAD, AFB, *item* mBD, DFm *æquales, per* XXXIIII *primi. Ergo per* XXXII *eiuſdem, adiuuante etiam poſteriore parte* XXVIII

 primi,

primi, parallelogramma q A D F, F D B m *sunt rectangula. & proinde recta* F q, F m *ad punctum* F *recta ipsius* D F *duos angulos duobus rectis æquales, imo rectos, facientes, componunt vnam lineam directam perpetuam* q m, *ac denique per posteriorem partem* XXVIII *primi, anguli* F D A, F D B *sunt recti. Recta igitur* D F *basi* A B *est perpendicularis, per definit.* X *primi Elementi. Quod est prius.*



Rursus quia, ex hypothesi, quadrata F A, F B *sunt inter se vt longitudines* D A, D B, *& aut sumpta sunt, vt priore demonstratione, aut data, (nam nihil refert) longitudo quidem* D A *expositarum partium* IX, *longitudo autem* D B *vnius, necesse est omnino ex hypothesi, quadratum* A F *esse nonuplum quadrati* F B, *ac consequenter idem quadratum* A F *esse nouenarium numerum. Sed quadratum a longitudine* D A, *est talium* 81, *qualium vnius quadratum a longitudine* D B: *insuper quadratum* A F *potest quadrata* D A, D B *per* XLVII *primi. Ergo quadratum* A F *est maius quadrato* D A, *ac proinde maius, quam nouenarius* 81. *Sit igitur æquale proximo nouenario* 90. *Ergo quadratum* F B *erit* 10, *ex hypothesi. Atqui tam* 90 *est media proportionalis inter* A B, D A, X, *&* IX, *quam quadratum* F B *inter* A B, D B, *vnum, & decem. Ergo, per Coroll.* VIII *sexti, Triangulum* A F B *est orthogonium, & angulus* F *rectus. Vel aliter. Quia quadratum* A F 90, *potest quadratum simul* A D 81, *potest & quadratum* D F, *per* XLVII *primi: ergo quadratum* D F *est* 9. *Erit igitur media proportionalis inter* D A, D B, *per Coroll.* XX VI, *cum sit vt longitudo* D B, *ad longitudinem* D A, *vnum ad nouem,*

nouem, ita quadratum DB, *ad quadratum* DF, *vnum ad nouem. Quare per* XIII *tertij decimi, descriptus super* AB *semicirculus* AEB, *transibit necessario per* F. *Ideoque per* XXXI *sexti, angulus* F *est rectus. Quod est posterius. Ergo ἐὰν τριγώνου γωνίαι, &c. Quod erat demonstrandum.*

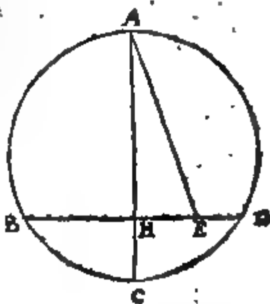
ΣΧΟΛΙΟΝ.

At Archimedes conatur demonstrare inductione ad impossibile longitudinem perimetri paulo minorem esse supra diametrum tripla sesquiseptima. hoc est potentiam perimetri minorem esse, quam 484, cum scilicet quadratum diametri fuerit 49. Quem errorem satis superior demonstratio refellit. Sed quare hoc sibi & posteritati persuaserit, in Prolegomenis declaratum est. Similis vero absurditas est in XVIII & XIX περὶ ἑλίκων Archimedis. Porro Ptolemæus in Canone sinuum construendo statuit perimetrum circuli 360 partium, diametrum autem 120: vt necessario vna $\frac{1}{120}$ diametri non sit æqualis vni $\frac{1}{360}$ perimetri, imo minor. Habet enim ille rationem quadrati semidiametri ad quadratum subtendentis, non autem diametri ad perimetrum. Ex hac methodo sequitur latus hexagoni esse 60 partium, qualium est diametrus 120, item peripheriam, quam subtendit, totidem esse, nempe talium 60, non qualium diametrus 120 est, sed qualium perimetrus 360. Posita itaque perimetro partium 360, quadratum eius erit 129600. Quadratum igitur diametri erit 12960, per ea, quæ antea demonstrata sunt. Latus autem potentiæ 12960 est minus, quam 114: quam analogiam sequi debent artifices tabularum in construendis sinuum Canonibus. Nam cum ratio quadrati à semidiametro ad quadratum à subtendente habenda sit, longitudo illius ad longitudinem huius deprehendatur per XLVII primi, vtendum erit potentia diametri, nempe 12960. Et ita talium erit partium diametrus, qualium perimetrus. Nam aliter facere ratio diametri ad perimetrum non sinit, quamuis methodus Ptolemæi assequitur quod proponit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ. Πρόβλημα.

Κύκλου δοθέντος εὐθεῖαν ἴσην τῇ αὐτοῦ περιμέτρῳ εὑρεῖν.

PROPOSITIO VII. Problema.



Dato circulo, rectam æqualem eius ambitui reperire.

Perimetro, siue ambitui circuli ABCD *sit recta æqualis inuenienda. Inscribatur ei latus*

F G

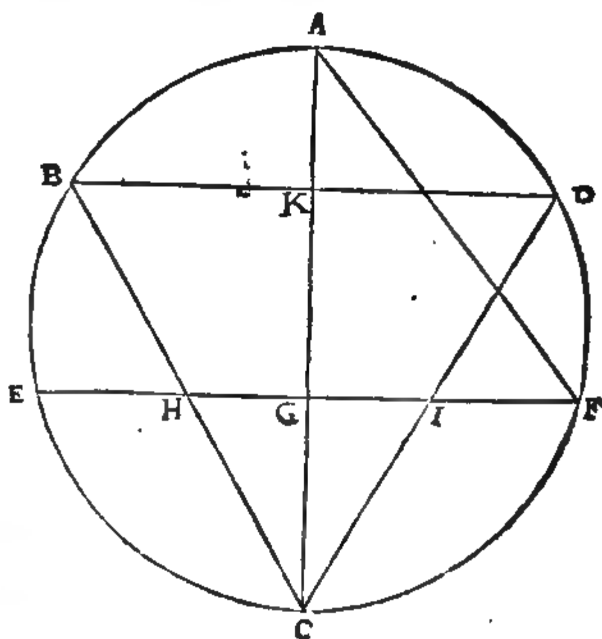
Trigoni isopleuri BD. *Per* XII *tertijdecimi erit* HC *quarta pars*

 longi-

longitudinis AC. Ex recta HD abſcindatur recta HE æqualis ipſi HC. Connectatur recta AE. Recta igitur AH erit longitudine tripla rectæ HE, potentia autem nonupla eiuſdem, per eandem demonſtrationem, qua proxime triplum diametri nonuplum potentia diametri demonſtrauimus. Quadratum autem AE æquale eſt quadratis AH, HE, per XLVII primi. Erit ergo decuplum quadrati HE. Ideo AH ad HE rationem habet, quam triplum longitudinis diametri ad ipſam diametrum. Non enim differt hæc demonſtratio a ſuperiore. Quare per IIII ſexti triangulum AEB in ſuperiori demonſtratione erit æquangulum triangulo AHE. eritque in illo quidem vt BA ad AE, perimetrus ſcilicet ad diametrum, ita in hoc AE ad HE. Et alternando, vt perimetrus ad AE, ita diametrus ad HE. Sed diametrus, hoc eſt, AC eſt quadrupla ipſius HE, per XII tertiidecimi. Ergo perimetrus erit quadrupla ipſius AE. Quare ſi ſumatur longitudo FG quadrupla longitudinis AE, habebis rectam æqualem perimetro circuli ABCD. Quod erat faciendum.

ALITER.

Circuli ABCD, cuius diametrus AC, ſit inuenienda peripheria. Trianguli iſopleuri inuerſi BCD lateribus CB, CD bifariam ſectis in ſignis H, I, agatur per ipſa ſectionum ſigna recta EF, quæ parallela erit ipſi BD, & triangulum HCI ſuper baſi HI, erit æquangulum, & ſimile toti



CBD,

CBD, per II sexti. Qualium autem quatuor est quadratum lateris CB, talium trium est quadratum perpendicularis CK, ut alibi demonstratum est. Esto diametrus AC expositarum partium XVI. Qualium igitur 192 est quadratum a latere CB, talium 144 erit καθέτος CK. Sed qualium 192 est quadratum a tota CB, talium 48 erit quadratum a dimidia CH. Et proinde quadratum a perpendiculari CG erit talium 36, qualium quadratum a tota AC est 256, (aut qualium CK dupla ipsius CG est 36.) Ergo AC, & CG habent inter se rationem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & propterea sunt inter se longitudine commensurabiles, per IX decimi. Qualium igitur expositarum partium XVI est longitudo AC, talium CG erit VI: & consequenter talium X reliqua GA. Connectatur recta AF. Aio rectam AF esse quadrantem perimetri ABECFD. Per Coroll. XIX, & XX sexti, ut longitudo GA ad longitudinem GC, ita potentia GA ad potentiam GF: hoc est, qualiter decem ad sex: ita quadratum GA ad quadratum GF. Sed quadratum GA est talium centum, qualium quadratum AC 256. Ergo quadratum GF erit talium 60, qualium 100 est quadratum GA. Quare per XLVII primi, quadratum AF erit talium 160, qualium quadratum AC est 256, hoc est; qualium tota perimetrus ABECFD est 2560, per antecedentem. Sed 160 est sextadecima pars potentia 2560, & proinde quarta pars longitudinis extensa perimetri. Reliqua, ut supra, &c. Quod erat faciendum.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

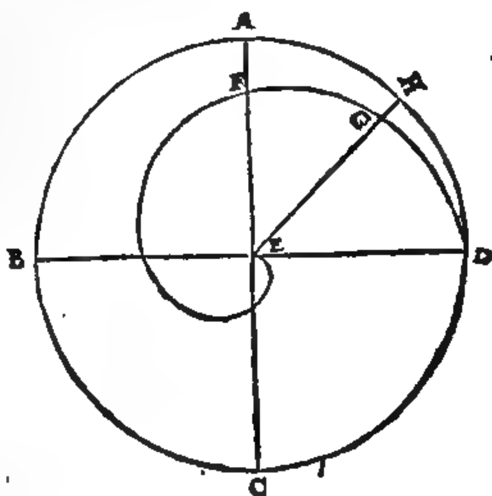
RVRSVS tam hinc, quam ex antecedente, colligitur, quid voluerit Archimedes, cum dixit, perimetrum supra diametrum minorem esse tripla sesquiseptima, maiorem tripla superdecupartiente septuagesimas primas. Esto longitudo diametri partium expositarum, 497. Vna septima erunt $\frac{71}{497}$. Vna septuagesima prima, erunt $\frac{7}{497}$. Archimedes igitur vult diametrum fore minorem, quam 1562, maiorem quam 1561. Vide, quantum erratur hoc modo. Nam si longitudo diametri fuerit partium 497, quadratum à perimetro erit 2470090. Cuius latus ἄρρητον est 1570 $\frac{2049}{3143}$ quod quidem est maius, quam 1562, cum differentia sit $\frac{8}{497}$ $\frac{2049}{3143}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η. Πρόβλημα.

Περιφερείᾳ τῇ τοῦ κύκλου δοθείσῃ ἴσην εὐθεῖαν εὑρεῖν.

PROPOSITIO VIII. Problema.

Peripheriæ in circulo datæ æqualem rectam inuenire.



K
N
L
M

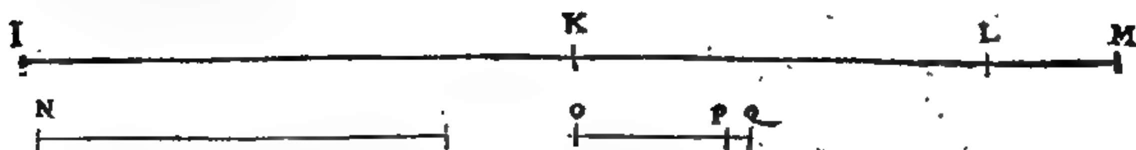
In circulo ABCD *data sit peripheria* BAH, *cui æqualem oporteat rectam reperire. Ductis diametris* AC, BD *normaliter sese secantibus, describatur voluta ordinata,* EFGD, *per primam huius; A principio autem volutæ, nempe ab* E *centro circuli, ad* H *limitem peripheriæ, agatur recta* EH, *secans volutam in puncto* G. *Per* XIIII *Archimedis* περὶ ἑλίκων, *ut est* ED, *id est,* EH, *ad* EG, *ita tota perimetrus* DCBAHD *ad peripheriam* HABCD. *Recta* KM *toti perimetro æqualis per antecedentem reperta secetur primum bifariam in signo* N, *deinde in rationem* EH *ad* EG, *in puncto* L. *Sed ratio* EH *ad* EG *est, ut perimetri* DCBAHD *ad peripheriam* HABCD. *Ergo ut* DCBAHD, *ad* HABCD, *ita* KM *ad* KL. *Sed* DCBAHD, *&* KM *sunt æquales. Ergo reliquæ* HABCD, *&* KL *sunt æquales. A quibus si auferantur æquales* DCB, KN, *remanebunt æquales* BAH, NL, *per* XIX *quinti. Quod erat faciendum.*

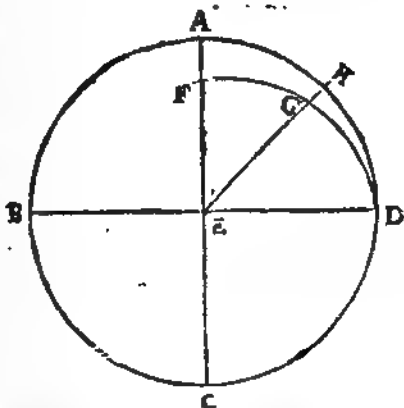
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ. Πρόβλημα.

Τῇ εὐθείᾳ δοθείσῃ ἴσην περιφέρειαν εὑρεῖν ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ.

PROPOSITIO IX. Problema.

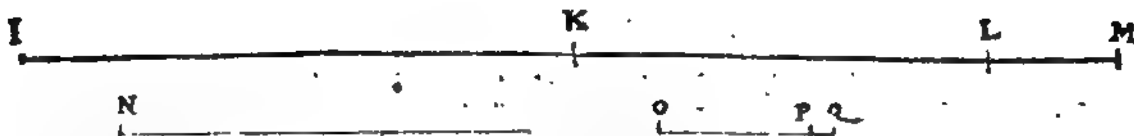
Rectæ datæ æqualem peripheriam inuenire in dato circulo.

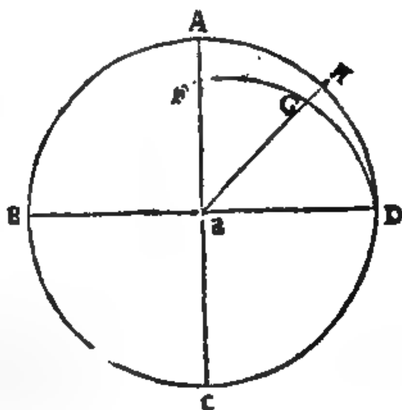




Data sit recta N, *cui peripheriam æqualem reperire oporteat in dato circulo* ABCD. *Esto recta* IM *perimetrus circuli dati, per* VII *huius: quæ secetur bifariam in* K. *Recta vero data* N *minor esto, quam recta* KM. *Ex ipsa* KM *abscindatur recta* KL *æqualis datæ* N. *Rursus in circulo* ABCD *normaliter secent sese diametri* AC, BD. *Describatur finis Volutæ ordinatæ* DGF, *per primam huius. Quia enim peripheria congruens rectæ datæ* N *est minor, quam peripheria* BAD *ex hypothesi (posita enim est minor, quam recta* KM, *quæ peripheriæ* BAD *est æqualis) cadet eius finis inter* A, D. *Secetur recta* OQ *æqualis semidiametro* ED, *in rationem* IL, LM, *per* X *sexti, in signo* P. *Erit igitur vt* IL *ad* LM, *ita* OP *ad* PQ. *Quod si centro* E, *interuallo autem* OP *describendus esset circulus, is secaret necessario portionem volutæ* FGD. *Secet in* G: *& ex centro* E, *ad signum* G *ducta, & eiecta ad peripheriam vsque* AHD, *secet eam in* H. *Aio peripheriam* BAH *æqualem esse rectæ datæ* N. *Quia enim per* XIIII περὶ ἑλίκων *Archimedis, est quemadmodum* ED *hoc est* EH, *ad* EG, *ita peripheria tota* DCBAHD *ad peripheriam* HABCD, *erit alternando, vt tota* EH *ad totam* DCBAHD, *& ablata* EG *ad ablatam* HABCD, *ita reliqua* GH, *ad reliquam* HD, *vt tota* EH

 ad to-





ad totam DCBAHD, *per* XIX *quinti. Sed peripheria* DCBAHD *sumpta est æqualis* IM, *& ex constructione est* IL *ad* LM, *vt* EG *ad* GH, *nempe vt* OP *ad* PQ. *Ergo per* XI *quinti, vt tota* DCBAHD *ad totam* IM, *& ablata* HABCD, *ad ablatam* IL, *ita reliqua* HD *ad reliquam* LM. *Sed* KLM *sumpta est æqualis ipsi* BAHD. *Ergo ablatis æqualibus* LM, HD, *remanent æquales* KL, BAH. *Quod erat faciendum.*

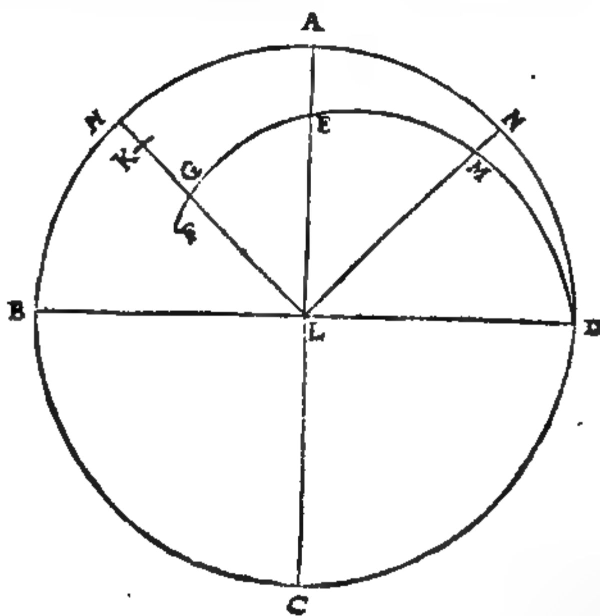
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι. Πρόβλημα.

Τῆς δοθείσης περιφερείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

PROPOSITIO X. Problema.

A data peripheria imperatam partem auferre.

A peripheria HAD *data in circulo* ABCD, *abscindenda sit pars imperata puta tertia. Ductis diametris* AC, BD *sese normaliter secantibus, describatur portio voluta ordinata* DEF. *A puncto autem* H, *qui est finis peripheriæ datæ, ad centrum* L, *agatur recta* HL, *quæ secet portionem volutæ in signo* G. *A recta*



GH, *(quæ*

GH,(*quæ est recta* LH *pars*) *abscindatur tertia pars* KH, *per* IX *sexti. Igitur, vt in proxima propositione demonstratum est, circulus describendus centro* L, *interuallo* LK, *secabit portionem volutæ in signo quodam. Secet in signo* M. *Agatur recta* LN *secans portionem volutæ in* M, *peripheriam autem* AND, *in* N. *Quare quia rectæ* LH, LN *sunt æquales, & ablatæ* LK, LM *æquales, ex constructione: & reliquæ igitur* KH, MN *erunt æquales, per communem sententiam* III. *Aio* ND *esse partem imperatam, nempe tertiam peripheriæ datæ* HAD. *Cum enim, vt proxime ostensum est, sit quemadmodum* LD, *hoc est* LH, *ad totam perimetrum* DCBHAD, *ita* GH *ad* HAD, *aut* MN, *ad* ND: *erit etiam quemadmodum tota* FH *ad totam* HAD, *ita* MN, *hoc est* KH, *ad* ND. *Et alternando, vt* FH, *ad* KH, *ita* HAD *ad* ND. *Et ἀνάπαλιν, vt* KH *ad* FH, *ita* ND *ad* HAD. *Sed* KH *est tertia pars ipsius* FH. *Ergo* ND *erit tertia pars ipsius* HAD. *Neque aliter facies, si imperata fuerit septima, aut quinta. Quod erat faciendum.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Si proponantur duo inæquales circuli, & de alterutrius peripheria partem alterius peripheriæ æqualem auferre oporteat, hoc per duas proxime antecedentes efficies. Nam hoc nihil aliud est, quam per proximam, partẽ imperatam à circulo ablatã alteri circulo, per IX huius applicare.

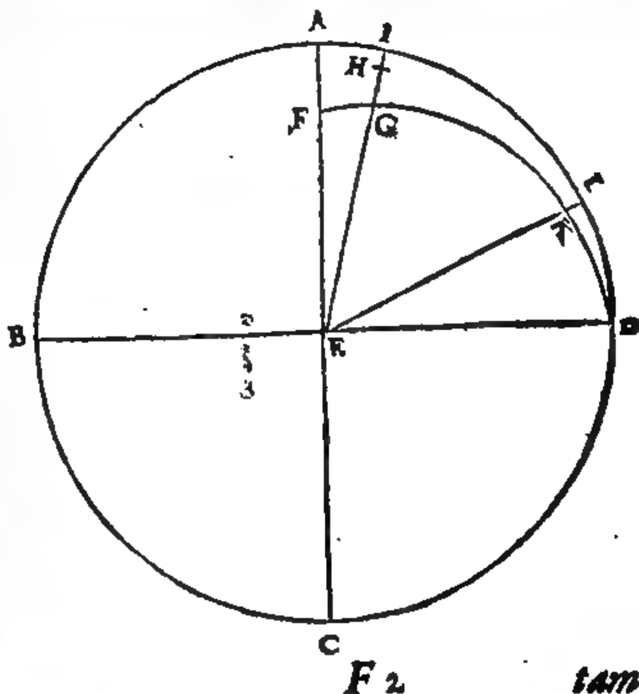
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ. Πρόβλημα.

Τῆς δοθείσης γωνίας εὐθυγράμμου τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

PROPOSITIO XI. Problema.

A dato angulo rectilineo imperatam partẽ auferre.

Datus sit angulus quicunque rectilineus IED, *a quo oporteto impera-*



tam partem auferre, puta tertiam. Centro E, *interuallo quocunque, a rectis* IE, DE *angulum datum continentibus auferatur peripheria quacunque: aut, quod idem prope est, ut in hac figura, centro* E, *interuallo* EI, *describatur circulus* ABCD. *Continuatam autem diametrum* DEB *secet* πρὸς ὀρθὰς *alia diametrus* AC. *Inscribatur in circulo finis voluta ordinata* DKGF: *quam recta* EI *secabit in puncto* G. *Ablata tertia parte* HI *a recta* GI, *per* IX *sexti, interuallo* EH *circulus describendus secet portionem volutæ in signo* K. *Connectatur recta* EL *transiens per signum* K. *Per ea, quæ in superioribus demonstrata sunt, erit ut* GI *ad* KL, *hoc est ad* HI, *ita peripheria* LD, *tertia pars peripheriæ* ILD, *ex eadem superiore demonstratione. Sed ut* ILD *ad* LD, *ita angulus* IED *ad angulum* LED, *per* XXXIII *sexti. Quare angulus* LED *est tertia pars imperata ab angulo dato* IED *ablata. Neque aliter faciendum, si quinta aut septima pars imperata fuerit. Quod erat faciendum.*

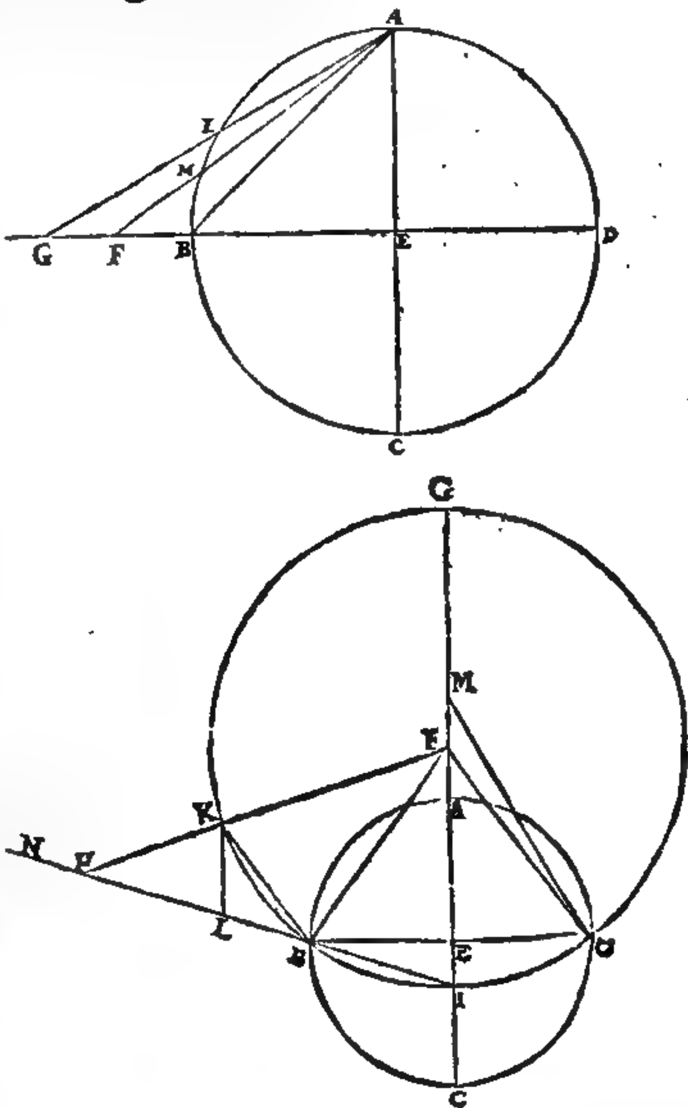
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο διαμέτρων ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς τεμνουσῶν, ἀπὸ τοῦ πέρατος μιᾶς ἐπὶ τὴν ἑτέραν ἐκβληθεῖσαν αἱ πλευραὶ ἑξαγώνου καὶ πενταγώνου τῶν τῷ κύκλῳ ἐγγραφομένων ἐκβληθῶσιν, ἡ τῆς ἐκβληθείσης διαμέτρου ἀποτομὴ, ἡ μεταξὺ τῆς τε ἑξαγώνου ἐκβληθείσης καὶ τοῦ τετραγώνου τῷ κύκλῳ ἐγγραφομένου πλευρᾶς, δίχα ὑπὸ τῆς τοῦ πενταγώνου τέμνεται.

PRO-

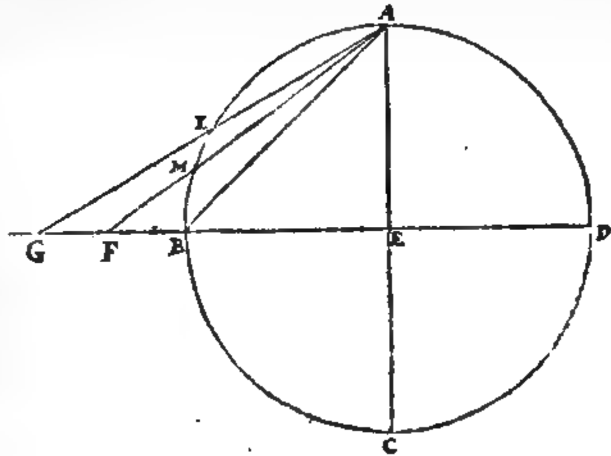
PROPOSITIO XII. Theorema.

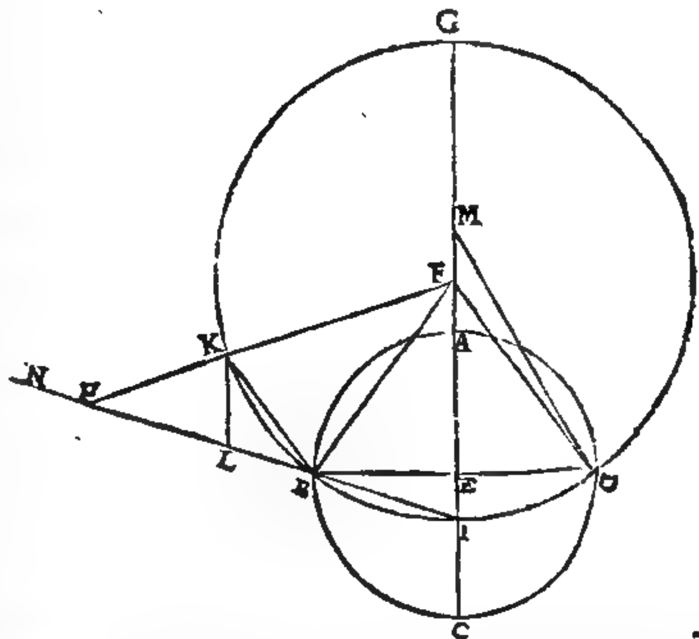
Si duabus diametris in circulo ſeſe normaliter ſecantibus, a limite vnius ad alteram productam latera Hexagoni & Pentagoni eidem circulo inſcribendorum eiiciantur: reſiduum diametri eiectæ, quod interiectum eſt inter productum latus Hexagoni, & latus Quadrati circulo eidem inſcribendi, bifariam a latere Pentagoni ſecatur.



In circulo ABCD, *diametrus* BD *ſecans diametrum* AC *normaliter producta ſit ad partes* G *in infinitum: cui producta occurrat recta* AG *aequalis diametro* AC. *Connectatur recta* AB, *&* CG. *intelligatur eſſe iuncta. Deinde recta* BG *ſecta ſit bifariam in* F. *Et manifeſtum eſt* CG *eſſe aequalem ipſi* GA: *& totum triangulum* AGC *eſſe aequilaterum, & quadrata* AG, EG *eſſe vt* 4, *&* 3, *vt iam toties diximus, ideoque inter ſe potentia commēſurabilia tantum.* EB *autem dimidia ipſius* AG *eſt ipſi* AG *longitudine commenſurabilis, ideoque ipſi* EG

potentia tantum commensurabilis. Erit igitur B G ἀποτομὴ, *linea* ἄλογος. *Aio, si in illam* ἀποτομὴν B G *recta a limite* A *in punctum sectionis bifaria* F *demissa fuerit, in ipsa demissa esse latus Pentagoni circulo* A B C D *inscribendi: hoc est, latus Pentagoni circulo* A B C D *inscribendi productum occurrere signo* F. *Iungatur igitur recta* A F *secans peripheriam* A L B *in puncto* M. *Aio* A M *esse latus Pentagoni circulo* A B C D *inscribendi. Describatur alius circulus* A B C D, *cuius diametrus* A C *diametrum* B D *secans producatur in partes* M, *aut* G. *Connectatur* D M *aequalis diametro* B D. *Diuisa*





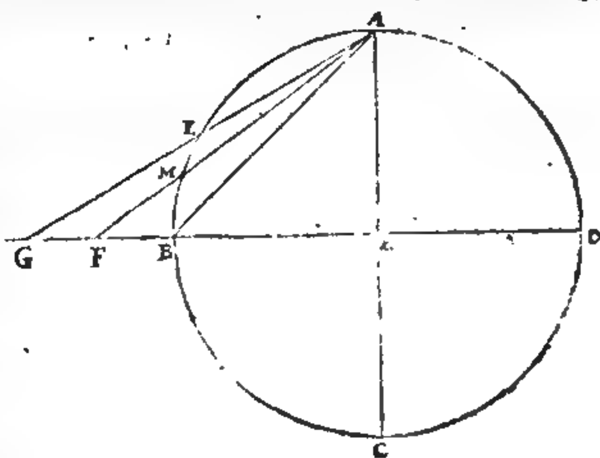
A M *in* F *bifariam, iungantur* F D, F B. *Itaque, vt vides, hic* M D *obtinet locum rectae* A G *in altero circulo. &* A M *est Apotome obtinens locum ipsius* B G. *Ostendendum est Triangulum* B F D *esse vnum ex quinque Triangulis, in quae Pentagonum resoluitur. Eadem enim opera ostendetur in* D F, *hoc est in* A F *(in altero circulo) esse latus Pentagoni. Centro* F, *interuallo* F D, *aut* F B, *describatur circulus* G B I D. *Connectantur rectae aequales* B I, B K, *& ex producta* I B *infinite in* N, *abscindatur* B H *ipsi* F B *aequalis. Connectatur*

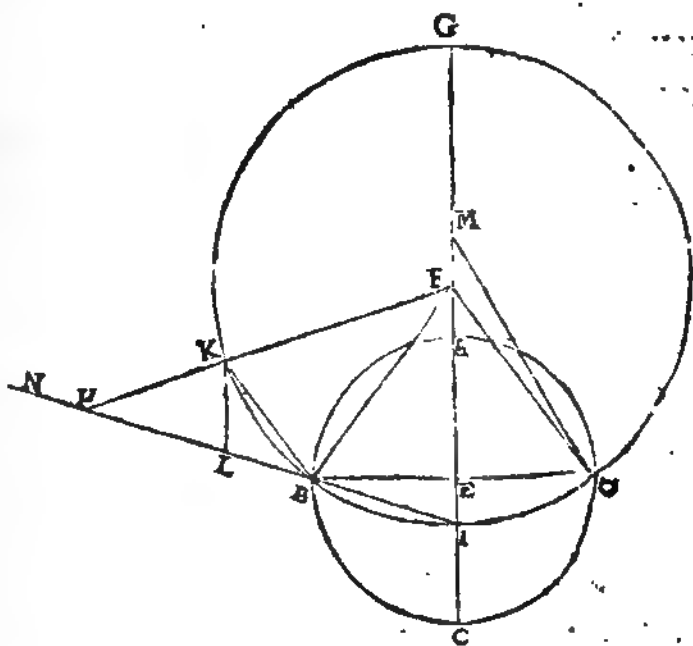
recta

recta HF, *secans peripheriam* GKBID *in* K. *Deinde ex* HI *abscindatur* HL *ipsi* HK *aequalis. Quia recta* IB, BK *aequales sumptae sunt: ergo peripherias aequales subtendent, per* XXVIII *tertij: & per* XXVII *eiusdem, anguli* KFB, BFI *Triangulorum* FKB, FIB *sunt aequales: & triangulum* KHL *alterutri triangulorum* FKB, FBI *aequiangulum, cum angulus* BHF *sit aequalis angulo* BFH, *per* V *primi. Si enim duorum triangulorum isoscelium anguli ad verticem sunt aequales, reliqui omnino erunt aequales, per* XXXII *primi, & triangula ipsa aequiangula. Quare triangula* KFB, BFI, KHL *sunt aequiangula. Anguli autem infra basim* KLB, BIC *sunt aequales, per* V *primi. Sed sunt alterni. Ergo rectae* KL, FI *sunt parallelae, per* XXVII *primi. Itaque per* II *sexti in triangulo* HFI, *erit vt* HK, *ad* KF, *ita* HL *ad* LI. *componendo, vt* HF *ad* HK, *ita* HI *ad* HL. *ἀνάπαλιν, vt* HK *ad* HF, *ita* HL *ad* HI. *ἐναλλάξ, vt* HK *ad* HL, *ita* HF *ad* HI. *Sed* HK, HL *ex constructione sunt aequales. Ergo* HF, HI *sunt aequales. & propterea Triangulum* HFI *isosceles. Cum igitur in triangulo* HFI *angulus ad verticem* F *sectus sit bifariam per rectam* FB *secantem basim* HI *in* B, *per* III *sexti, erit vt* HF, *hoc est* HI, *ad* FI, *ita* FI, *hoc est* HB, *ad* BI. *Ergo recta* HI *secta est in* B *media, & extrema ratione, per* III *definit. sexti. atque adeo eius segmentum maius* BH *est aequale semidiametro* FI *circuli* GBID. *Ergo minus segmentum* BI *est latus Decagoni eidem circulo* GBID *inscribendi, per conuersam* IX *tertij decimi Elementi, olim a Campano demonstratam. Et quia semidiametrus* FI *rectam* BD *bifariam secat in* E, *ex hypothesi, peripheriam quoque* BID *bifariam secabit, per* IIII *huius. & ideo peripheriae* IB, ID *sunt decimae partes perimetri* GBID. *Recta autem* BD *erit latus Pentagoni eidem perimetro* GBID *inscribendi. Triangulum isosceles* HFI *habens alterutrum angulorum ad basim* F, I *dupli anguli* H, *qui ad verticem, est triangulum Pentagoni ad peripheriam, per* X *&* XI *quarti, si per* V *eiusdem, circa illud circulus describatur. Ergo Triangulum* BFD *est triangulum ad centrum vnum ex illis quinque, in quod Pentagonum circulo* GKBID *inscribendum resoluitur, quandoquidem basis eius*

BD *est*

BD est latus Pentagoni circulo, cuius centrum F, inscribendi. Quod si in priore figura recta CF *iungatur, triangulum* AFC *est id triangulum, in quod Pentagonum circulo inscribendum, cuius circuli semidiametrus* FA, *resoluitur. Quare si recta* EM *iungeretur, esset triangulum isosceles* MAE *æquangulũ triangulo* AFC, *cum angulum communem* MAE *habeant, & sint ambo isoscelia. Ergo reliquus* AEM *reliquo* AFC *erit æqualis. Est ergo triangulum isosceles* AME *vnum ex quinque, in qua Pentagonũ resoluitur circulo* ABCD *inscribendum. ac propterea* AM *est latus Pentagoni eidem circulo* ABCD *inscribendi. Quod erat demonstrandum.*





ΣΧΟΛΙΟΝ.

HINC clare constat, si duorum triangulorum isoscelium angulus ad verticem fuerit æqualis, Triangula fore æquangula. Nam in priore figura, si CF, & EM iungantur, ostensum est, quia amborum isoscelium FAC, EMA vnus angulus MAE est communis, & illi æquales sunt EMA, ACF, reliquum AEM reliquo AFC fore æqualem. E conuerso igitur anguli ad verticem AEM, AFC sunt æquales. Ergo reliqui sunt æquales. Sed & hoc clarius per V sexti, aut per XXXII primi.

Rursus quia si circuli diametrus fuerit linea certa, latus Pentagoni in eo inscripti est linea irrationalis, quæ vocatur Minor, per XI tertiidecimi: & contra si latus Pentagoni

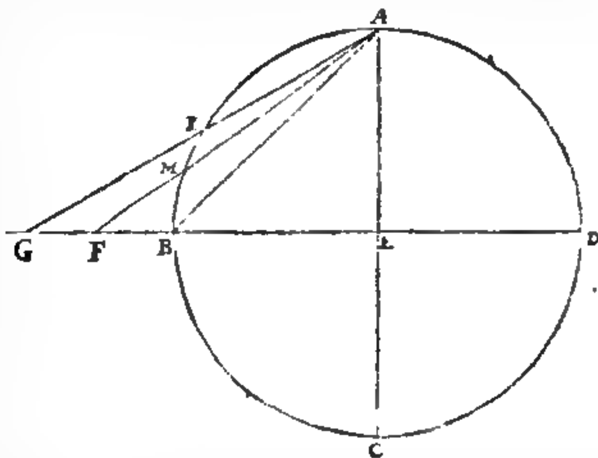
goni circulo inscripti fuerit linea certa, tota circuli diametrus est linea irrationalis: est autem hic recta D B (in secunda figura) nempe latus Pentagoni, certa: ostendendum est, diametrum G I, vel, quod idem est, semidiametrum F D, esse irrationalem. Nam Apotomæ A M cum sit recta A F commensurabilis, dimidio scilicet totum: erit & A F Apotome, & ordine eadem, per C I I I I decimi. Sed Apotomæ A M vna tantum recta congruit certa siue ῥητὴ E A, quæ toti E M sit potentia commensurabilis, per L X X X decimi. Ergo E A cum Apotoma A F non efficiet totam E F potentia sibi commensurabilem. Quare tota E A est linea irrationalis. Semidiametrus autem D F potens rectas E F, E D per X L V I I primi, est irrationalis. & tota diametrus irrationalis. Nam potentiæ E F, E D sunt inter se incommensurabiles. Ergo compositum ex ambabus, nempe D F, est alteterutri ipsarum incommensurabile, per X V I I decimi. Quod enim ibi de longitudinibus tantum dicitur, id etiam ad potentias extenditur, &c. Cum igitur D F sit incommensurabile ipsi E D ῥητῇ, ipsum erit ἄλογον. Quod erat demonstrandum.

ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΤΕΡΟΝ.

QVOD si in priore figura centris B, F, G, interuallis autem B A, F A, G A, circuli describantur: erit A C quidem latus polygonorum æquilaterorum eisdem circulis inscribendorum. Triangula autem A B C, A F C, A G C, erunt ea, in quæ polygona ipsa resoluuntur. verbi gratia: Triangulum B A C est vnum ex illis I I I I, in quæ quadratum resoluitur inscribendum circulo, cuius circuli semidiametrus B A. Rursus F A C erit triangulum vnum ex illis quinque, in quæ Pentagonum resoluitur inscribendum circulo, cuius circuli semidiametrus est F A. Nam cum recta M A ex constructione sit latus Pentagoni circulo A B C D inscribendi, erit M A E semiangulus ipsius Pentagoni. Sed angulus Pentagoni est sex quintarum vnius recti. Ergo angulus M A E est trium quintarum: angulus autem ad E quinque quintarum. Ergo angulus A F E erit duarum quintarum, per X X X I I primi, adiuuante etiam X V I I eiusdem. Angulus autem totus A F C in triangulo Isoscele C A F (sic F iungatur) erit quatuor. Quare angulus ad peripheriam in Triangulo isoscele super basi A C constituto erit duarum quintarum, nempe dimidium anguli A F C ad centrum C constituti, per X X tertij. Erit igitur alteruter angulorum ad basim quaternum quintarum, ac propterea duplus anguli ad verticem: ideoque erit angulus Pentagoni, per X quarti. Quare Triangulum isosceles A F C est vnum ex quinque, in quæ Pentagonum resoluitur. Eodem modo centro G, interuallo G A descripto circulo, esset triangulum A G C vnum ex illis sex, in quæ Hexagonum circulo, cuius circuli semidiametrus G, inscribendum resoluitur.

Porro omnium Polygonorum æquilaterorum in circulo eodem inscriptorum latera sunt inæqualia inuicem. Si enim latus Hexagoni lateri Pentagoni eodem in circulo inscriptorum esset æquale, Pentagonum haberet sex latera, aut Hexagonum quinque: quod est absurdum. Si igitur Triangula, in quæ resoluuntur Polygona æquilatera, super vna eademque recta linea constituta fuerint, non erit eorum idem circulus. Latera enim eorum Triangulorum sunt semidiametri circulorum, in quorum centris eorum vertices constituti sunt. Quo plura autem fuerint Polygoni latera, eo maiora erunt necessario triangulorum latera: hoc est, maiores erunt semidiametri circulorum, in quorum centris constituti sunt vertices triangulorum isosceleon, in quæ polygona diuiduntur. Distabunt igitur centra circulorum inuicem aliquot interuallis, vt patet in interuallis G F, F B. In istis interuallis considerantur dif-

ferentiæ angulorum inuicem. Sunt enim G F, F B bases triangulorum G A F, F A B: Anguli autem G A F, F A B sunt differentiæ angulorum ad centrum A B E, A F B, A G E. qui quidem anguli sunt semisses triangulorum isosceleon A B C, A F C, A G C, siquidem rectæ C B, C F coniunctæ animo concipiantur. Rursus anguli A B E, A F B, A G E habent duas partes vnius anguli recti cognomines numeri laterum Polygonorum suorum. Verbi gratia: Trianguli A B E polygonum est quadratum, cuius quatuor sunt latera. Ergo angulus A B E habebit duas quartas vnius recti: angulus A F E duas quintas, angulus denique A G E duas sextas. Atque adeo qualium XXX partium cogitetur angulus rectus, talium X V erit A B E, X I I A F E, X A G E. Quod si continuanda esset series angulorum in Polygonis, angulus Heptagoni haberet duas septimas; angulus octagoni duas octauas: angulus enneagoni duas nonas: & ita deinceps. Rursus in triangulis amblygoniis A F E, A G E, anguli externi A B E, A F E ad oppositos internos A F E, A G E habent rationem ἐπιμόριον, siue superparticularem cognominem polygonorum suorum. Angulus videlicet A B E angulum A F E superat vna quarta, quæ est pars cognominis quadrati, quod quidem in quatuor triangula resoluitur æqualia ipsi A B C. Sic angulus A F E oppositi & interni anguli A G E sesquiquintus est. Quod si cogites angulum rectum partium 210, omnino semitriangulum quadrati erit 105, pentagoni 84, hexagoni 70, heptagoni 60: adeo vt angulus primus ad secundum sit sesquiquartus, secundus ad tertium sesquiquintus, tertius ad quartum sesquisextus. & ita deinceps in infinitum. Contraria est ratio angulorum B F A, F G A ad verticales B A F, F A G. Nam eorum ad illos ratio est multipla cognominis numeri laterum non polygonorum suorum, sed antecedentium: hoc est vno latere minus, quam Polygonorum suorum. Angulus itaque A F B, cum pertineat ad Pentagonum, erit non quintuplus, sed quadruplus anguli verticalis B A F. Sic angulus F G A erit anguli F A G non sextuplus, sed quintuplus. Nam per X V I I primi angulus externus A B E est æqualis vtrique interno opposito A F B, F A B. Erit ergo F A B trium, qualium duodecim est A F B, aut quindecim A B E. Erit enim A B F X L V, per X I I I primi.



Si anguli verticales binorum proximorum καὶ ἀμέσων Polygonorum parium laterum cogitentur ordine dispositi in infinitum, vt est angulus verticalis G A B inter duo Polygona proxima, Quadratum videlicet, & Hexagonum: deprehendetur angulum G A B esse partium quinque: angulum autem inter Hexagonum & octagonum partium septem: angulum inter Octagonum, & Decagonum partium nouem: angulum denique inter decagonum & dodecagonum partium vndecim: & ita deinceps in infinitum. & quia angulus verticalis Polygoni imparium laterum interiectus ipsos angulos secat, secabit eos in numeros pares & impares. Verbi gratia: Anguli F A B, G A F constituti a linea Pentagoni A F diuidentes angulum quinque partium G A B, non sunt æquales. Sed F A B trium partium, G A F autem duum. Sic angulorum ex linea Heptagoni constitutorum diuidentium angulum septem partium Hexagoni & Octagoni, propior Hexagono

gono erit quatuor partium, remotior trium. Eorum autem, qui secabunt angulum Octagoni & Decagoni nouem partium, propior octagono erit quinque partium, remotior quatuor, & ita deinceps. adeo vt diuisio ita facta sit, vt accedente vnitate ad minorem, ipsa diuisio sit bifaria, &c.

Super lateribus polygonorum æquilaterorum constituti anguli ad peripheriam dimidium sunt angulorum ad centrum, per XX tertij: acquirunt autem alterum dimidium angulis ad basim. Verbi gratia: Angulus ad peripheriam circuli, cuius semidiametrus AF, super basi AC, est dimidius anguli ad centrum, hoc est, æqualis angulo AFE: acquirit autem angulo ad basim dimidium eiusdem AFB, & alteri ad basim alterum dimidium. Ita sit, vt alteruter angulorum ad basim sit reliqui multiplus, aut multiplus sesquialter: multiplus quidem, si polygonum circulo inscribendum fuerit laterum æqualium imparis numeri: multiplus autem sesquialter, si fuerit æqualium laterum imparis numeri. Quota autem pars fuerit angulus ad peripheriam angulorum amborum ad basim simul sumptorum, eadem pars erit vnum latus reliquorum laterum simul sumptorum. Super latere, verbi gratia, Pentagoni, constituitur triangulum isosceles, cuius angulus ad peripheriam est quarta pars amborum angulorum ad basim simul sumptorum, cum alteruter ex ipsis sit duplus reliqui. Ergo & latus vnum Pentagoni reliquorum quatuor simul sumptorum erit quarta pars. vt in ipsis triangulorum tribus simul angulis considerandæ sint tot multiplicitates, quot in eorum Polygonis sunt latera.

Rursus angulus quadrati habet quinque quartas Pentagoni, sex quartas hexagoni, septem quartas heptagoni, octo octagoni, &c.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τὰ τρίγωνα ἰσοσκελῆ, εἰς ἃ διαιρεῖται τὰ πολύγωνα ἰσόπλευρα, τὰ εἰς κύκλον ἐγγραφόμενα, συσταθῶσιν, αἱ κατὰ τὰς κορυφὰς γωνίαι τῶν ἀρτιοπλεύρων πολυγώνων τὸ ἀμέσως μεταξὺ τῶν συσταθέντων ἀρτιοπλεύρων πολυγώνων διάστημα δίχα τέμνουσι.

PROPOSITIO XIII. Theorema.

Si super eadem recta Triangula æquicruria, in quæ diuiduntur Polygona æquilatera circulo inscribenda, constituta fuerint, anguli Polygonorum ad verticem latera paris numeri habentium bifariam secant interuallum interiectum inter duo proxima polygona latera paris numeri habentia.

 Si super

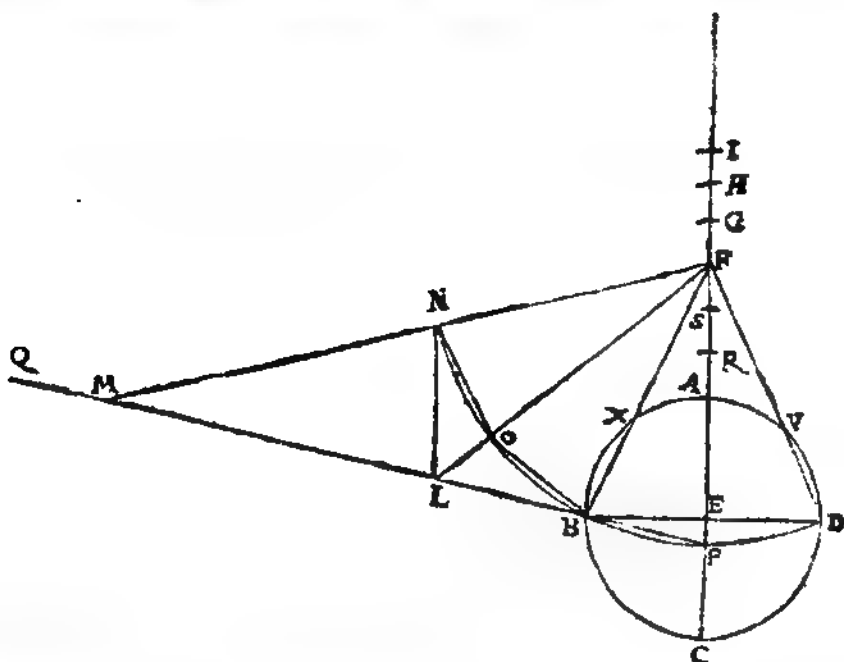
Si ſuper eadem recta linea Triangula iſoſcelea, in quæ polygona circulo inſcribenda reſoluuntur, conſtituta fuerint, ea diſtabunt a ſe aliquot interuallis, per ſecundam partem ſuperioris Scholij. Aio

interualla, quæ ſunt in diametro producta, vt in antecedenti figura patuit, interualla, inquam, interiecta inter duo proxima polygona paris numeri laterum, ſecari bifariam a lateribus polygonorum imparis numeri circulo inſcribendorum productis, & occurrentibus diametro productæ: quemadmodum in ſuperiore Theoremate demonſtratum eſt, latus Pentagoni circulo inſcribendi productum & occurrens diametro eiectæ, ſecare bifariam interuallum inter quadratum & Hexagonum, quæ ſunt duo ἄμεσα & proxima Polygona paris numeri laterum. In circulo ABCD, *diametrum* BD *ſecet normaliter diametrus* AC *producta infinite: quæ ſecetur in* S, *quaſi recta* SD *æqualis rectæ* AC *iuncta eſſet a limite* D, *& faceret ſemitriangulum iſopleuron* DSE, *vt ſupra oſtenſum eſt. Rurſus abſcindatur interuallum* AG *æquale lateri quadrati circulo* ABCD *inſcribendi. Si igitur recta* DG *iungeretur, eſſet angulus* EGD *ſemiangulus trianguli vnius ex octo, in quæ octagonum circulo, cuius ſemidiametrus* GD, *inſcribendum reſoluitur,*

resoluitur, per XX *tertij. Postremo interuallum* AS *bifariam secetur in* R. *Si* DR *iuncta esset, esset semiangulus trigoni vnius ex quinque, in quæ Pentagonum resoluitur, vt supra ostensum est. Quare fiat interuallum* RI *æquale rectæ connectendæ* DR. *Rursus si recta* DI *necteretur, esset* IDE *semitriangulum vnum ex decem, in quæ decagonum resoluitur, per eandem* XX *tertij. Secentur interualla* AS, SG, GI *bifariam in signis* F, H. *Connectatur recta* DF, *secans circulum* ABCD *in* V. *Ostendendum est* DV *esse latus Heptagoni circulo* ABCD *inscribendi. Centro* F, *interuallo* FB, *vel* FD, *describatur peripheria* PBON. *Iungatur recta* PB: *cui æquales connectantur* BO, ON. *Itaque peripheriæ, quæ ab illis subtenduntur, sunt æquales, per* XXIX *tertij. Producatur* PB *ad partes* Q *in infinitum: cui occurrat recta a limite* F, *connectens* N *terminum peripheriæ* ON, *& pergens, donec occurrat infinitæ* PQ *in signo* M. *Iungantur rectæ* FD, FB, FL, *& ex recta* PM *abscindatur recta* ML *æqualis ipsi* MN. *Connectatur* NL. *Quia anguli* NOF, BOF *sunt æquales ex constructione, producto latere communi* FL, *erunt anguli subter basim* NOL, BOL *æquales, per* V *primi. & per* IIII *eiusdem, erunt bases* LN, LB *æquales in triangulis* NLO, BLO: *& angulus* ONL *angulo* OBL *æqualis. Sed anguli* FNO, FBO *sunt æquales, ex constructione. Ergo totus angulus* LNF *toti angulo* LBF *æqualis. Rursus* FNL, MNL *simul in recta* MF *sunt æquales angulis* FBM, FBP, *simul in recta* PM, *per* XIII *primi. Ablatis æqualibus* FNL, FBM, *remanent æquales* FBP, MNL. *Ideo anguli* MNL, MLN *angulis* FBP, *hoc est*, FNO, FON *æquales. Et quia sunt triangula isoscelea, erit reliquus angulus* NML *reliquo* NFO *vel* NFL *æqualis: & propterea recta* FL *rectæ* LM *æqualis in triangulo* MLF. *per primi. In triangulo igitur* MLN, *anguli* NML, MLN *æquales sunt angulis* MPF, FMP *in triangulo* MFP. *Et reliquus igitur* MNL *reliquo* MFP *æqualis: & trianglum* NML *triangulo* FMP *æquangulum, & simile, per* I. *definit.* VI. *Ideo per* IIII *eiusdem, erit vt* MN *ad* ML, *ita* MF *ad* MP. *Sed* MN. NL *ex constructione sunt æquales. Ergo &* MF, MP *sunt æquales: & triangulum* MFP

 isosceles,

isosceles, cuius angulus MFP *super basi* FP *est triplus anguli* M. *Ergo triangulum* MFP *est triangulum Heptagoni ad peripheriam, per proximum Scholion. & quia triangulum* BFP *est*



æquangulum, ut iam demonstratum est, trianguli MFP, *erit & ipsum triangulum heptagoni ad peripheriam, & proinde triangulum ad centrum unum ex quatuordecim, in quæ Tessarescadecagonum resoluitur, per* XX *tertij. Et ideo segmentum* BP *est segmentum Tessarescadecagoni, & recta subtendens est eius latus. & quia peripheria* PD *peripheriæ* BP *est æqualis, (quod tota* BPD *diuidatur bifariam a recta* FP *diuidente subtendentem* BD *bifariam, per* IIII *huius,) ergo recta* BD *est latus Heptagoni circulo inscribendi, cuius circuli semidiametrus est* FD. *ac propterea triangulum* BFD *est triangulum ad centrum ex illis septem, in quæ Heptagonum resoluitur. Quod si recta* EV *iungeretur, esset triangulum isosceles* EVD *æquangulum triangulo isosceli* BFD, *cum angulum ad* D *communem habeant. Erit igitur triangulum* EVD *unum ex illis septem, in quæ Heptagonum circulo* ABCD *inscribendum resoluitur. & propterea* DV *est latus Heptagoni circulo* ABCD *inscribendi, quod pro-*

productum secat bifariam interuallum SG *in puncto* F. *Quod si coniungantur* HB, HD, *& centro* H, *interuallo* HB, *aut* HD, *describatur peripheriæ portio ita, vt ex ea, quæ eiecta erit post* B, *abscindantur tres peripheriæ æquales illi, quam recta* HE *producta finiuerit, & reliqua, vt hic, absoluantur: habebis triangulum enneagoni ad peripheriam. Demonstratio eadem est. Ita omnia alia triangula isoscelea proportionalia habebis in infinitum. Sed semper obseruandum, vt vltima linea, qualis est* LF, *sit æqualis ipsi* LM, *&* FM *æqualis ipsi* PM *secet præcise limitem vltimæ peripheriæ. Alioquin erratum est. Quod erat demonstrandum.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ. Πρόβλημα.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσοσκελὲς συστήσασθαι, οὗ ἑκατέρα τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν ἔχῃ πρὸς τὴν λοιπὴν τὸν δοθέντα λόγον.

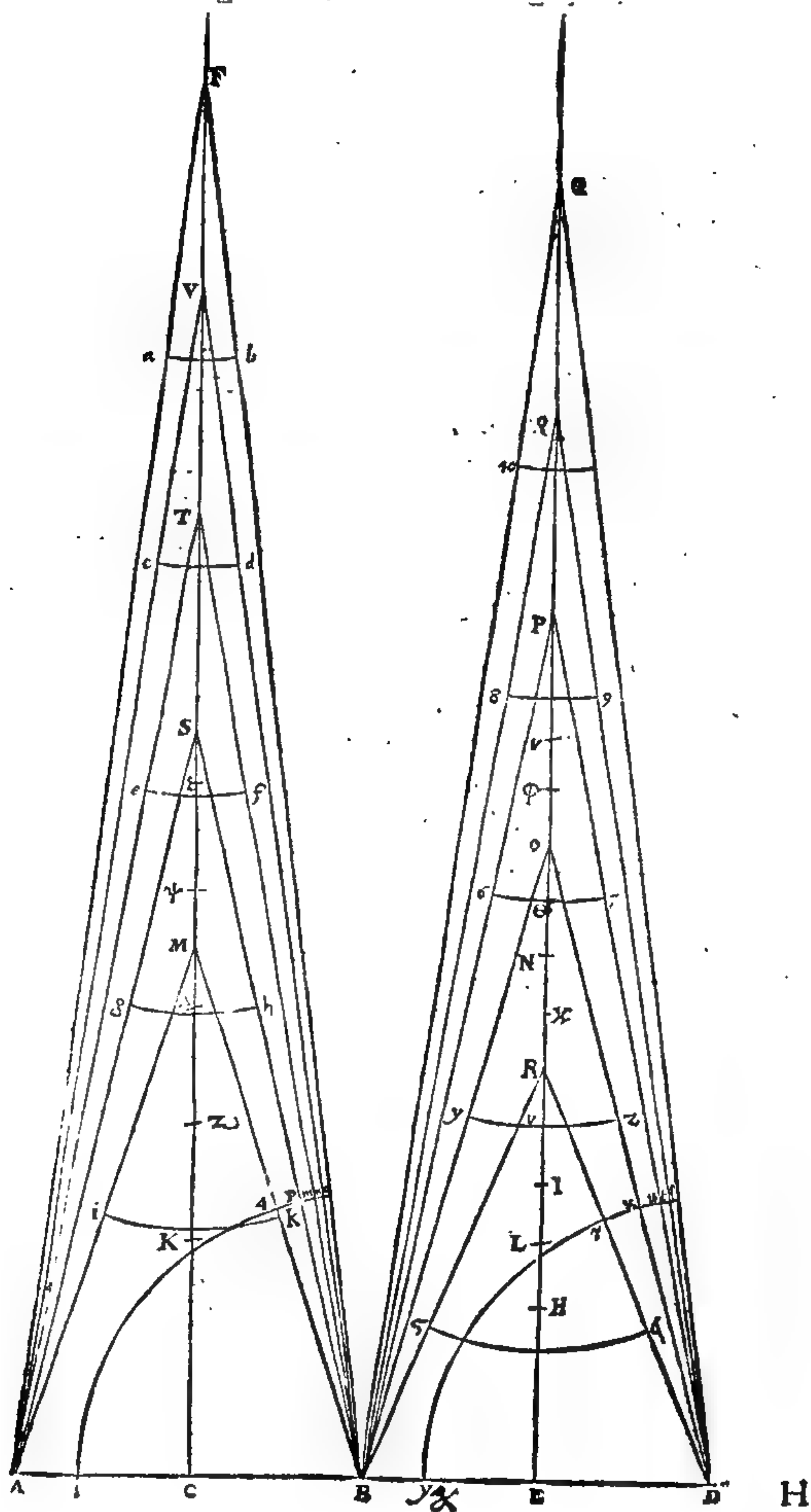
PROPOSITIO XIIII. Problema.

Super data recta linea terminata Triangulum isosce-

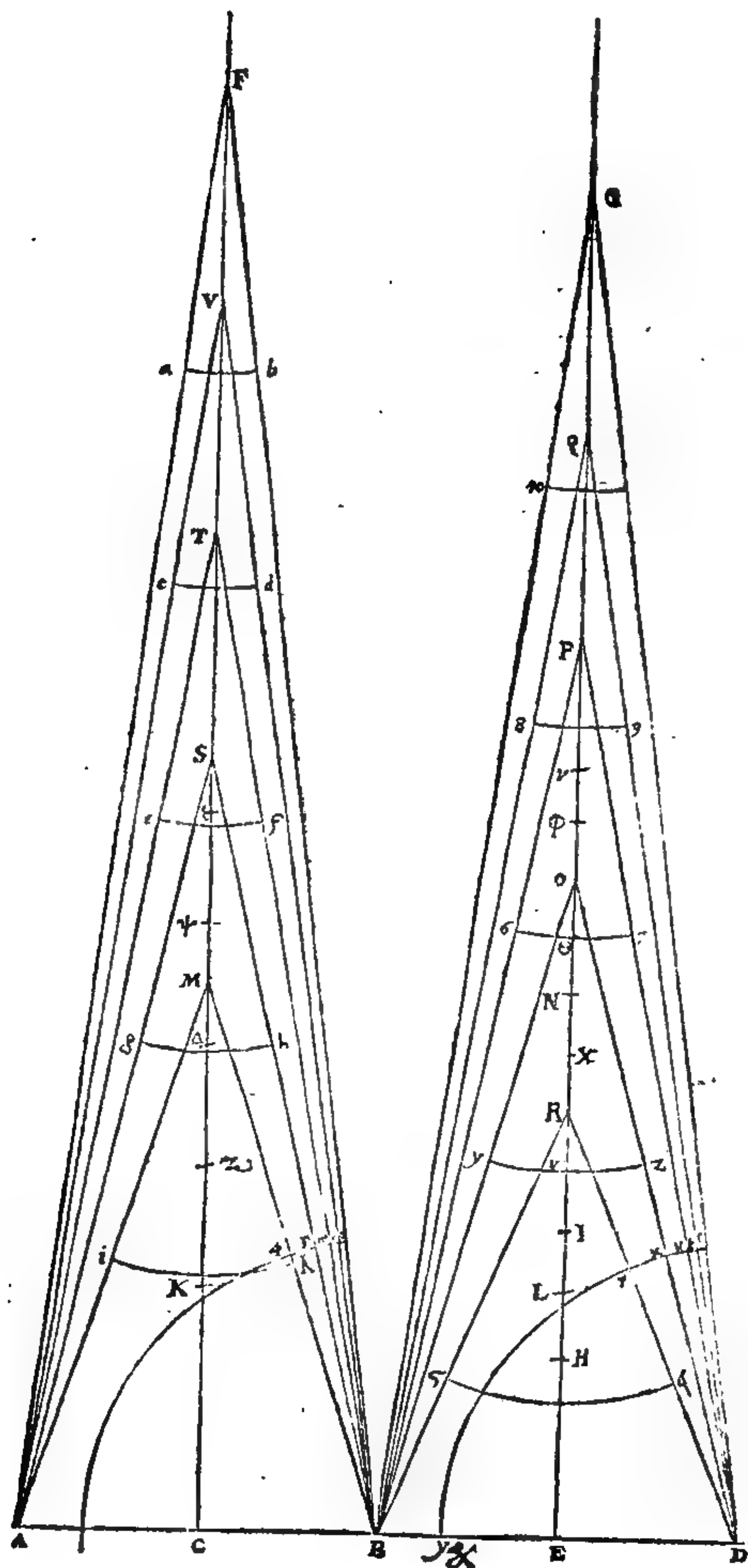
isosceles constituere, cuius alteruter angulorum ad basim habeat ad reliquum rationem datam.

In superiori propositione docemur quidem omne Triangulum isosceles construere, cuius alteruter æqualium angulorum habeat ad reliquum rationem datam. Sed non data est basis. Imo super inæqualibus basibus constituta sunt. Exempli gratia, in antecedenti figura basis PR *Trianguli Pentagoni est minor basi* PF *Trianguli Heptagoni: & ipsa* PF *minor basi trianguli Enneagoni* PA. *Hic contra super data recta linea terminata iubemur omne tale Triangulum isosceles constituere. Data* AB, *& ei æquali* BD, *diuisis bifariam in* C, E, *constituantur a punctis sectionum perpendiculares infinitæ* CF, EG. *Abscindatur recta æqualis dimidiæ* ED. *Interuallo autem connectenda* DH *abscindatur æquale* HR. *Connexis rectis* RB, RD, *erit triangulum isosceles* BRD, *triangulum quadrati ad peripheriam. & idem erit triangulum octagoni ad centrum; per* XX *tertij. Deinde connectenda* DI *fiat æqualis ipsi* DB. *Quod si rectæ* DI, BI *connecterentur, esset triangulum* BID *triangulũ hexagoni ad centrum. Interuallo igitur connectendæ* DI *fiat æquale* IO. *Connexis rectis* BO, DO, *erit triangulum* BOD *triangulum Hexagoni ad peripheriam, per eandem* XX *tertij. Interuallo connexæ* DR *fiat æquale* RP. *Iunctis rectis* BP, DP, *erit triangulum isosceles* BPD, *Triangulum octagoni ad peripheriam. Secto bifariam in* L, *interuallo* HI *interiecto inter angulos ad centrum* H, I *Quadrati & Hexagoni, abscindatur* CK *æqualis ipsi* EL *in perpendiculari* CF: *& interuallo connectendæ* BK *abscindatur* KM *æquale. Connexis* AM, BM, *erit Triangulum* AMB *Triangulum Pentagoni ad peripheriam, & idem triangulum decagoni ad centrum. Quare interuallo connexæ* BM *abscindatur æquale* EN, *in perpendiculari* EG. *In qua interuallo connectendæ* DN *fiat* NQ *æquale. Connexis* BQ, DQ, *erit Triangulum* BQD, *triangulum Decagoni ad peripheriam. Interuallo* IR *inter Triangula ad centrum Hexagoni & Octagoni secto bifariam in* Y, *abscindatur spatio* EY *æquale* CZ *in perpendiculari* CF. *interuallo autem rectæ*

conne-


F
V
a
b
T
c
d
S
e
f
ψ
M
g
h
z
i
K
K
A
C
B
Q
P
8
9
o
6
N
R
y
v
z
I
L
H
E
D
H

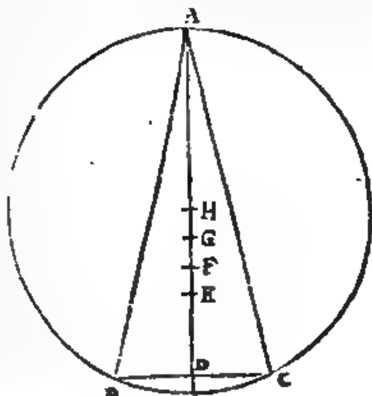
connectenda BZ *fiat aequale* ZS. *Iunctis rectis* AS,BS. *erit Triangulum*, ASB *Triangulum Heptagoni ad peripheriam: ideoque idem erit Triangulum ad centrum Tessarescadecagoni. Ex perpendiculari* EG *abscindatur* Eν *aequalis ipsi* CS: *interuallo autem rectae connectenda* Dν *fiat aequale* νG. *Connexis rectis* BG,DG, *erit Triangulum* BGD *Triangulum Tessarescadecagoni ad peripheriam. Rursus interuallo* RN *interiecto inter Triangula Octagoni, & Decagoni ad centrum, secto bifariam in* X, *fiat* CΔ *aequale ipsi* EX. *Interuallo vero connectendae* BΔ *fiat aequale spatium* ΔT. *Connexis rectis* TA,TB, *erit, per antecedentem, Triangulum* BTA, *Triangulum Enneagoni ad peripheriam. Interuallo* NO *inter Triangula ad centrum Decagoni & Dodecagoni in perpendiculari* EG, *diuiso bifariam in* Θ, *fiat* CΨ *in perpendiculari* CF, *aequalis ipsi* EΘ. *Interuallo rectae connectendae* BΨ *fiat aequale* ΨV. *Iunctis rectis* VA,VB, *erit Triangulum* AVB *Triangulum Hendecagoni ad peripheriam. Eodem modo Triangulum* AFB *erit Triscadecagoni ad peripheriam, sumpto interuallo aequali inter Triangula ad centrum Dodecagoni, & Tessarescadecagoni. Nam Triangulum* ASB *est Triangulum Tessarescadecagoni ad centrum. Ex peripheria* EG *abscindatur recta* Eν *aequalis rectae* CS. & *interuallo* Oν *inter Triangula ad centrum Dodecagoni & Tessarescadecagoni secto bifariam in* φ, *in perpendiculari* CF, *fiat* Cε *aequalis ipsi* Eφ. *Interuallo vero connectendae* Bε *fiat aequale* εF. *Et ita semper in infinitum progredi possumus. Itaque habemus super data recta* AB, *triangula isoscelea polygonorum περισσοπλεύρων ad peripheriam*, AMB, ASB, AVB, AFB, *Pentagoni, Heptagoni, Enneagoni, Hendecagoni, Triscadecagoni. Super recta autem* BD *aequali datae* AB, *habemus totidem Triangula isoscelea ad peripheriam polygonorum ἀρτιοπλεύρων* BRD, BOD, BPD, BQD, BGD. *Quare angulus* MAB *erit duplus anguli* M: *angulus* SAB *anguli* S *triplus: angulus* TAB *quadruplus anguli* T: *angulus* VAB *quintuplus anguli* V: *angulus denique* FAB *anguli* F *sextuplus. Decircinatis eodem interuallo peripheriis* ol, ik, gh, ef, cd, ab, *erit peripheria* ql *dupla peripheriae* ik: *peripheria* pl *tripla ipsius* ef: &


F
G
V
a
b
T
c
d
S
e
f
ψ
M
g
h
i
K
A
C
B
E
D
P
8
9
φ
O
6
N
R
y
z
I
L
H

e f: & sic deinceps per XXXIII *sexti. Sic peripheria* Y *& peripheria* 5 q *sesqualtera: peripheria* X *& peripheria* Y Z *dupla sesqualtera. Quod erat faciendum.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ex his perspicuum est, quomodo dato vno ex his triangulis isoscelibus circulus circa illud describendus sit. Esto datum triangulum isosceles A B C habens angulum ad basim triplum illius, qui ad verticem, nempe A. Iubemur circulum circa illud describere. Acta perpendiculari A D, ex ea auferatur D E, æqualis ipsi D C. Per ea, quæ in superioribus propositionibus demonstrata sunt, Triangulum C E B esset id, in quod resoluitur quadratum. Deinde sit spatium C G æquale ipsi B C. Diuisa E G bifariam in F, est nota Pentagoni. Esto H nota Heptagoni. Centro H interuallo H A descriptus circulus transibit per B, C. Neque demonstratione opus est: cum per antecedentia satis ostensum sit iunctis H C, H B, triangulum H B C esse triangulum ad centrum resoluendo Heptagono. Ergo tam connectenda H C, quam H B sunt semidiametri, &c.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον σχῆμα περισσογώνιον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XV. Problema.

Circulo dato figuram imparis numeri angulorum æquilateram inscribere.

In dato circulo I K L N, *cuius diametrus* I N, *centrum* M, *sit describendum Heptagonum, aut Enneagonum, aut aliud polygonum laterum imparis numeri. Super recta* A B, *quæ non sit minor semidiametro* N M, *describantur triangulum quidem Heptagoni* A D B, *Enneagoni autem* A C B, *per antecedentem. Deinde per* II *quarti, in circulo* I K L N *describantur triangula æquangula triangulis* A D B, A C B. *Quare bases eorum erunt latera Polygonorum circulo inscribendorum, vt proxima propositione demonstratum fuit, aut quemadmodum Euclides in* XI *quarti, in descriptione Pentagoni fecit.*

ALITER.

ALITER.

In circulo ABCD *diametrus* BD *diametrum* AC *secans normaliter producatur in partes* H. *Sunto anguli* HAK, AGK *semiangu*-

guli triangulorum ad centrum Enneagoni, Heptagoni. Per ea, quæ ante demonstrata sunt, rectæ AL, AM *circulo* ABCD *accommo*-

 data

data erunt latera Heptagoni & Hexagoni eidem circulo inscriptorum, &c. Quod erat faciendum.

ΛΗΜΜΑ.

Πάντων τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων τὸ ὑπὸ τῶν διαγωνίων ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον πλευρῶν συγκειμένῳ.

LEMMA.

Omnium, quæ in circulis sunt, quadrilaterorum sub diagoniis conceptum rectangulum est æquale composito ex vtroque, quod oppositis lateribus continetur.

Demonstrationem pete ex Ptolemæi libro primo magni operis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις. Πρόβλημα.

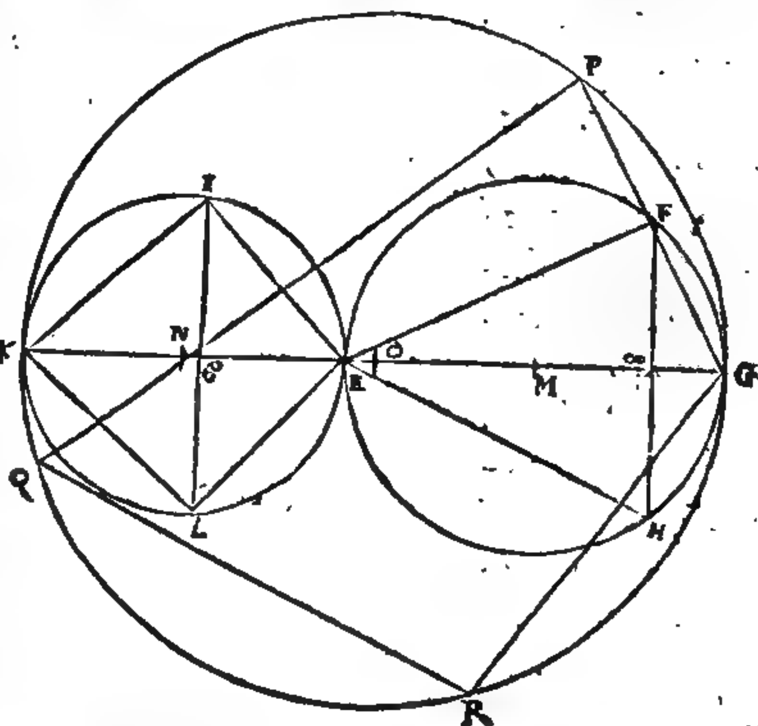
Τεσσάρων εὐθειῶν ἀνίσων δοθεισῶν προσευρεῖν κύκλον, ὥστε εἰς αὐτὸν τὸ ἐκ τῶν τεσσάρων δοθεισῶν συγκείμενον τετράπλευρον ἐνθεῖναι.

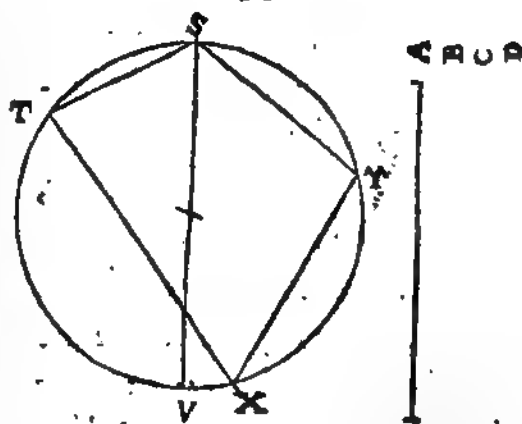
PROPOSITIO XVI. Problema.

Datis quatuor rectis inæqualibus, circulum inuenire, ita vt in eo inscribi possit quadrilaterum ex quatuor datis constitutum.

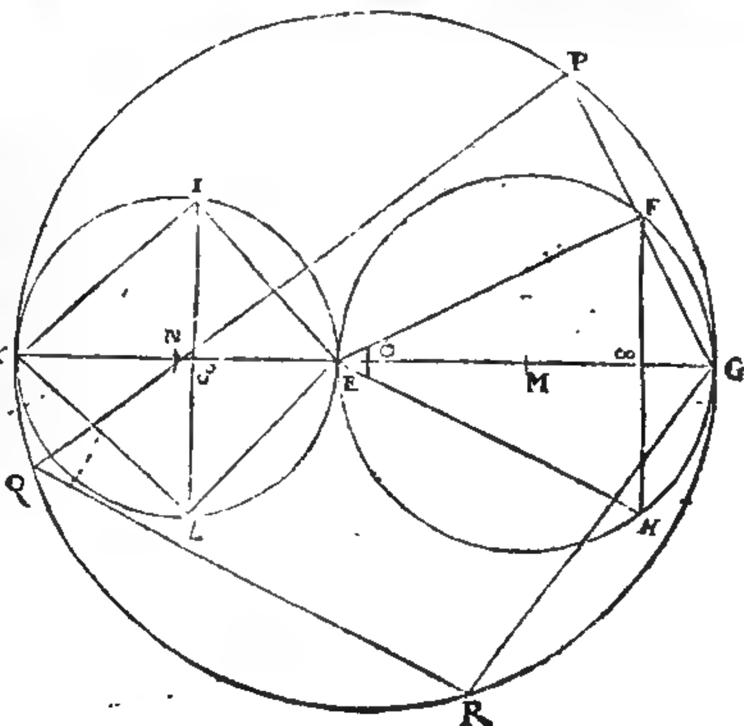
Vel, quod idem est, ἐκ τεσσάρων εὐθειῶν ἀνίσων δοθεισῶν τετράπλευρον συστήσασθαι, ὥστε περὶ αὐτὸ κύκλον περιγράψαι. Ex quatuor rectis inæqualibus datis quadrilaterum ita construere, vt circa ipsum circulus circumscribi possit. Sunto igitur datæ inæquales rectæ quatuor A, B, C, D. *Rectæ* FG, FE *æquales rectis* A, B, *item rectæ* IE, IK *æquales reliquis* C, D *faciant angulos rectos* F, I *super basibus collocatæ* EG, EK *componentibus vnam perpetuam rectam* KEG, *& diuisis bifariam in punctis* M, N. *Centris* M, N, *interuallis* MG, MK *descripti circuli transibunt per puncta* F, I, *per* XXXI *tertij, adiuuante*

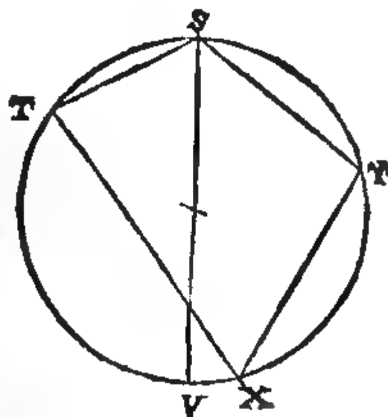
uante etiam V *quarti. Iunctis* HG, HE, *quæ ipsi* FG, FE, *item rectis* LE, LK, *quæ rectis* IE, IK *sint æquales, connectantur* FH, IL *secantes* EG, EK *in punctis* α, β. *Erit rectangulum sub rectis* EG, FH *æquale composito ex rectangulo sub oppositis* FE, GH, *& eo, quod sub oppositis* FG, EH: *item quod sub* IL, KE *erit æquale composito ex rectangulo sub oppositis* KI, LE, *& eo, quod sub oppositis* IE, KL, *vt demonstrat Ptolemæus in Lemmate antecedẽte. Ergo rectangulum sub composita ex* GE, EK. *& composita ex* HF, LI *est æquale rectangulo sub geminatis* FE, FG. *& geminatis* IK, IE, *in circulo, cuius diametrus composita erit ex vtraque* EK, EG: *id est cuius diametrus erit recta* GK: *qua diuisa bifariam in* O, *centro* O, *interuallo* OG, OK *descriptus circulus* PKQRG *continebit quadrilaterum* PQRG *compositum ex* PQ, QR, RG, GP *duplis rectarum* FE, IK, IE, EG. *Quare si iungerentur rectæ* PR, QG: *rectangulum sub diametris Quadrilateri, nempe sub* PR, QG, *esset æquale composito rectangulorum sub oppositis* PQ RG: *id est composito ex rectangulo sub duplis* FE, IE, *& eo, quod sub duplis* IK, FG. *Ergo per* XV *quinti, circulus descriptus*





descriptus circa OG, *vel* OK, *dimidia nempe ipsius* GK, *continebit quadrilaterum simile, similiterque situm quadrilatero* PQRG *habente rationem ad ipsum* PQRG, *quam quadratum ex diametro* OG, *vel* OK, *ad quadratũ a diametro* GK, *per primam* XII. *hoc est, quam recta ad suã duplam, nempe quam* FE *ad* PQ, *aut* IK *ad* QR, *aut* IE *ad* RG, *aut deniq.* FG *ad* PG. *Circa diametrũ igitur* SV, *quæ sumpta sit æqualis ipsi* OG, *vel ipsi* OK, *descriptus circulus* STVXY *continebit quadrilaterum* STXY *simile, similiterq. positum quadrilatero* PQRG, *ita ut rationem ad illud habeat, quam quadratum ex* SV *ad quadratum ex* GK, *hoc est, quam* FE, IK, IE, FG *ad homologas* PQ, QR, RG, GP. *Erunt igitur rectæ* TX, XY, YS, ST *æquales ipsis* FE, IK, IE, FG. *Sed ipsæ* FE, IK, IE, FG *sumptæ sunt æquales ipsis* D, C, B, A. *Ergo rectæ* TX, XY, YS, ST *quadrilateri* STXY *circulo* STVXY *inscripti sunt æquales rectis propositis* D, C, B, A. *Quod erat faciendum.*







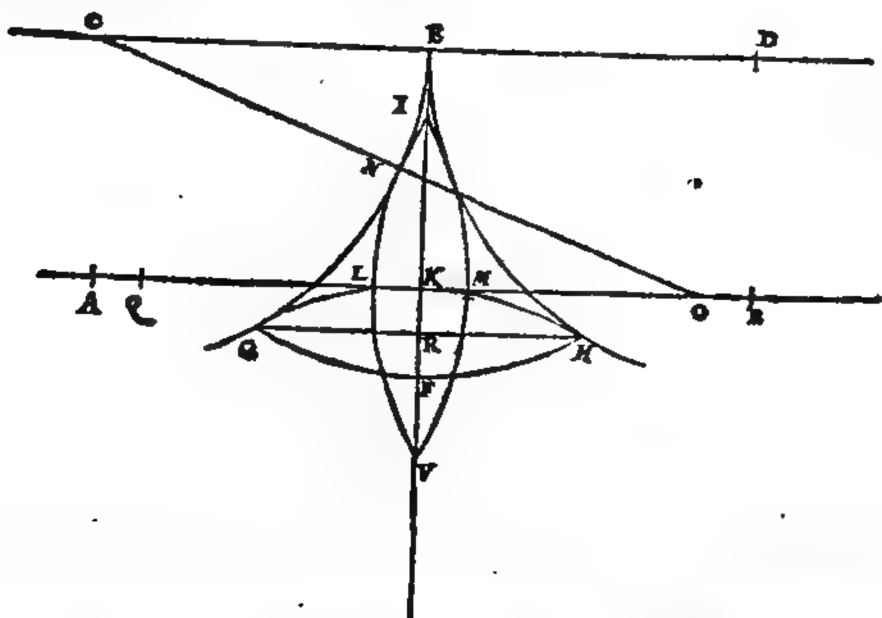
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ. Πρόβλημα.

Εἰς τὸ πελέκεως ἑξαγώνου παραπλήρωμα τμῆμα ἑξαγώνου ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XVII. Problema.

Complemento securiclæ Hexagoni segmentum Hexagoni inscribere.



Videndum, an complemento securicla Hexagoni inscribi possit segmentum Hexagoni, aut, quod idem, duo semisegmenta Hexagoni. Recta CED *magnitudinis non finita sit perpendicularis recta* EV *infinita. Abscindantur interualla quacunque aqualia* EC, ED. *Deinde centris* C, D, *interuallis vero* CE, DE, *describantur peripheria* EG, EH. *Rursus eodem interuallo, centro autem* E, *describatur peripheria* GFH: *quam recta* EF, *ex infinita* EV *abscissa, nempe semidiametrus peripheriarum, diuidet bifariam in* F. *Peripheria igitur* ENG, EH, GFH, *sunt aquales, per primam defin. tertij elementi: quia recta connexa* GH *est semidiametris* EF, CE, DE, *aqualis. Quare per definitionem primam huius, figura* ENGFHE *est securicla Hexagoni, & recta* RF *Apotome, vt alibi demonstratum est: cui aqualis* RK *abscindatur: & fiat segmentum* GRHMKLG

I aquale

æquale ſegmento GRFHG. *Ideo vtrumque erit ſegmentum Hexagoni. ac proinde figura* ENGKHE *eſt Complementum Securicle, per definitionem ſecundam huius. Iam Apotome* RF *minimo maiuſcula*

eſt vna octaua ſemidiametri EF, *vt in* V *huius demonſtratum eſt. Propterea tota* FK *duabus octauis ſemidiametri paulo maiuſcula eſt. Itaque reliqua* KE *paulo minus eſt intra ſex octauas ſemidiametri. Iccirco erit maior, quam* RG, *paulo minus, quam duæ octauæ ſemidiametri* EF, *vt in eadem* V *huius oſtenditur. In recta igitur* EK *poteſt inueniri altitudo ſemiſegmenti, cum peripheriæ* ENG, EH *tangant ſeſe tantum in puncto* E, *per* XIII *tertij. A puncto* K *agatur recta infinita parallela ipſi* CD, *per* XXXI *primi: ex qua abſcindatur* KB *æqualis ſemidiametro* DE, *vel ipſi* EC: *atque ex eadem rurſus abſcindatur apotome* BO, *æqualis ſcilicet apotomis* RE, RK. *Centro* O, *interuallo* OL, *quæ ſit æqualis ipſi* BK, *vel ipſi* DE, *deſcribatur peripheria* VLI. *Ab æqualibus* OL, BK, *auferatur commune* OK. *Remanebunt* BO, KL *æquales. Itaque* KL *eſt apotome. & ideo peripheria* VLI *eſt ſegmentum Hexagoni æquale nimirum ſegmento* GFHRG. *at* KI *erit æqualis ipſi* RG: & LIKL *æqualis ipſi* RFGR. *Eodem modo abſciſſa* QK, *quæ ſit æqualis ipſi* OL, *de-*

OL, *describatur peripheria* IMV. *Ita completa erunt duo dimidiata segmenta* IKL, IKM *æqualia segmentis dimidiatis* GFR, GKR. *Connectatur recta* CO *secans peripheriam* ENG *in puncto* N. *Ergo* CN *est semidiametrus peripheriæ* ENG, *per definitionem circuli. & propterea reliqua* NO *tota erit extra ipsam peripheriam* ENG. *Iam rectæ* ON, OL, *item rectæ* CN, CE, *sunt æquales ex eadem definitione circuli. Sed* OL, CE *sunt æquales, ex constructione. Ergo* ON, CN *diametri sese committentes in puncto* N *unam rectam perpetuam efficiunt* CNO. *imo* CNO *est perpetua ex constructione. & propterea peripheriæ earum sese contingent in puncto eodem* N. *Neque uspiam præterea sese aut contingent, aut secabunt, per* XIII *tertij. Similiter demonstrabimus* EH, IM *sese contingere in uno puncto, si recta* DQ *agatur. Ergo in Complemento Securiclæ inscriptum est segmentum Hexagoni, vel, quod idem est, duo semisegmenta, quæ in uno tantum puncto duo segmenta æqualia lateralia contingunt. Ideo relinquitur præterea subsiciuum spatium de Complemento, quod* RESIDVVM SEGMENTI *vocetur. Quod erat faciendum.*

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.

ΚΥΚΛΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ Β,

τὸ καὶ Κυκλοδυναμικόν.

CYCLOMETRICVM ELEMENTVM

POSTERIVS, QVOD ET CYCLODYNAMICON, ſiue de potentia circuli dicitur.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν πλῆθος μεγεθῶν ὁποσωνοῦν ἴσων μεγέθει τινὶ σύμμετρον ᾖ, καὶ ἓν ἐξ αὐτῶν τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρον ἔσται.

LEMMA.

Si multitudo æqualium magnitudinum quotcunque magnitudini cuipiam commenſurabilis fuerit, & vna quoque ex ipſis eidem magnitudini commenſurabilis erit.

Si enim magnitudo quædam ex quinque magnitudinibus æqualibus compoſita alicui magnitudini ſit commenſurabilis, & contra reliquæ quatuor magnitudines eidem fuerint incommenſurabiles: quatuor ergo magnitudines æquales quintæ erunt incommenſurabiles, per XIII *decimi. Quod eſt ineptum. Tam vna igitur ſeorſim, quam quinque ſimul eidem erunt incommenſurabiles. Idem cenſendum, ſi magnitudo quædam compoſita ex aliis quatuor congeneribus æqualibus, & reliqua diuerſi generis alicui magnitudini fuerit commenſurabilis, modo congeneres ſint commenſurabiles reliquæ. Nam, exempli gratia, ſunto* A, BBBB *ſimul commenſurabilia, alicui* C. *Si* A, BBBB, *id eſt, per priorem demonſtrationem Lemmatis,* AB, BBB, *fuerint inter ſe commenſurabilia, aio alterutram ipſarum magnitudinum ipſi* C *eſſe commenſurabilem. Nam ſi* AB, BBB *ſunt inter ſeſe commenſurabilia, & compoſita ex ipſis magnitudo alterutri* AB,

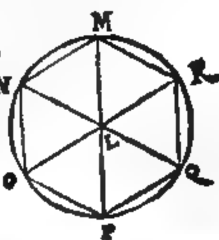
tri AB, BBB *erit commensurabilis, per priorem partem* XVI *decimi Elementi. Itaque composita magnitudo ex illis, & alterutra pars, cum sint inter se commensurabiles, vt iam ostensum est, & praeterea ex hypothesi composita sit commensurabilis ipsi* C: *erit ergo & reliqua eidem commensurabilis, per conuersam* XII *decimi. Quod erat demonstrandum.*

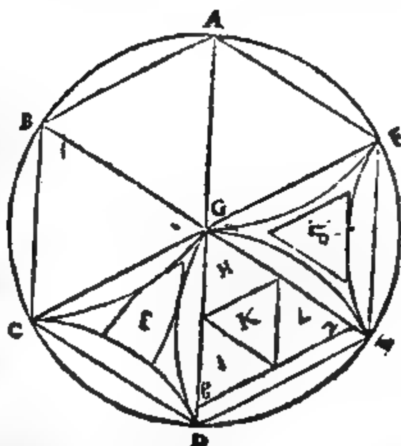
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α. Πρόβλημα.

Τοῦ τμέως ἑξαγώνου τέσσαρα ἀφελεῖν μεγέθη ἀνομοιογενῆ, ἀλλήλοις τε καὶ τῷ τμεῖ σύμμετρα.

PROPOSITIO I. Problema.

A Scalpro Hexagoni auferre quatuor magnitudines diuersi inuicem generis, quae & inter sese, & ipsi Scalpro sint commensurabiles.

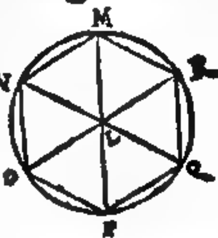


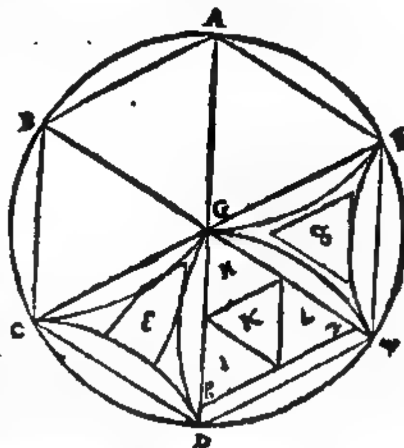


Esto circulus ABCD *cum suo Hexagono illi inscripto. Triangulis Hexagoni* GCD, GEF *inscribantur Cōplementa Securiclae. Rursus esto minor circulus* MNOPQR *cum suo Hexagono inscripto: cuius circuli diametrus* MP *sit quinta pars quadrati a diametro* AD *maioris circuli* ABCD. *Per primam duodecimi erit vt quadratum* MP *ad quadratum* AD, *ita Hexagonum* MNOPQR *ad Hexagonum* ABCDEF: *& per* XV *quinti, vt Hexagonum ad Hexagonum, ita triangulum* LOP *ad triangulum* GDE. *Ergo per* XI *quinti, vt quadratum* MP *ad quadratum* AD, *ita triangulum* LOP *ad triangulum* GDE. *Sed quadratum* MP *est quinta pars quadrati* AD. *Ergo triangulum* LOP *est quinta pars trianguli* GDE. *Cui aequalia sunto quatuor* H, I, K, L. *& trapezium* Dϛγεε *erit quinta pars trianguli* GDE. *Rursus eidem aequale* δ

 inscri-

inscribatur in Complemento Securiclæ trianguli G E F. *Fieri enim potest, cum altitudo trianguli* L O P *sit minor semidiametro. Denique in Complemento trianguli* G C D *inscribatur segmentum* ε, *per vltimam Cycloperimetrici. Ita in Scalpro Hexagoni* G C D *Complementum habet inscriptum segmentum cum suo Residuo. In Scalpro autem* G D E *Complementum habet triangulum* δ *cum suo Residuo. Ablatæ igitur sunt ex Scalpro quatuor magnitudines, Segmentum, Triangulum cum Residuis suis, quæ sunt diuersi generis. Quod est primum. Scalprum Hexagoni constat ex quinque segmentis, & residuo Segmenti. Ergo circulus constat ex triginta Segmentis, & sex Residuis segmenti. Præterea Scalprum* G D E *constat ex quinque triangulis æqualibus ipsi* L O P, *aut ipsi* δ, *& vno Segmento. Ergo circulus constat ex triginta triangulis* δ, *& sex segmentis. Segmenta igitur* XXX *de circulo dempta relinquunt sex residua segmenti. Et rursus Segmenta sex de circulo dempta relinquunt triginta triangula. Ergo sex Residua segmenti, &* XXX *triangula sunt commensurabilia* XXXVI *segmentis. & per priorem partem demonstrationis Lemmatis superioris, Triangulum, & Residuum segmenti sunt commensurabilia inter se. Porro Triangulum* G E F *constat ex tribus segmentis, &*





c *Complemento; hoc est, ex triangulo* δ, *& eius Residuo. Sed idem Triangulum, hoc est illi æquale* G D E, *constat ex quinque triangulis æqualibus ipsi* δ. *Ablato vtrinque triangulo, remanent tria segmenta cum Residuo Trianguli æqualia quatuor triangulis. Quare quatuor triangula sunt commensurabilia tribus Segmentis cum Residuo Trianguli. & per proximi Lemmatis demonstrationem alteram, vnum Segmentum, & vnum Trianguli Residuum simul vni Triangulo sunt commensurabilia. Erunt igitur & commensurabilia*

rabilia vni residuo segmenti, per conuersam XII *decimi. Quare magnitudo composita ex residuo trianguli & segmento est commensurabilis tam Triangulo, quam Residuo Segmenti. Jam quatuor Triangula* δ, *cum totidem Residuis Trianguli sunt æqualia quatuor Complementis, hoc est tribus Segmentis* ε, *cum suis Residuis, item vni Triangulo cum suo Residuo. Sed vnum Residuum Trianguli cum tribus segmentis demonstratum est æquale quatuor Triangulis. Ergo reliqua tria residua Segmenti cum reliquo triangulo reliquis quatuor Residuis Trianguli sunt æqualia. Ac proinde vnum Residuum Trianguli vni Triangulo cum Residuo Segmenti est commensurabile, per antecedens Lemma. Sed Triangulum, & Residuum Segmenti ostensa sunt commensurabilia. Ergo tam Triangulum, quam residuum segmenti ipsi Residuo Trianguli sunt commensurabilia. Tria igitur inter se sunt commensurabilia: nempe vtrumque Residuum, & Triangulum. Sed Residuum & segmentum simul sunt ostensa Triangulo commensurabilia. Erunt igitur & commensurabilia Residuo vtrique, per antecedens Lemma. Quare si residuum Trianguli cum segmento, est Residuo Trianguli commensurabile, ergo Segmentum, & triangulum sunt commensurabilia. Quatuor igitur commensurabiles magnitudines de Scalpro Hexagoni abstulimus: Triangulum, Segmentum, Residuum Trianguli, Residuum Segmenti. Quod est secundum. Rursus Complementum est compositum ex duabus magnitudinibus commensurabilibus, siue Triangulo cum Residuo Trianguli, siue Segmento cum Residuo Segmenti. Ergo tota magnitudo alterutri ipsarum partium erit commensurabilis, per* XVI *decimi. Præterea Scalprum* GCD *constat ex Complemento, & quatuor Segmentis ipsi Complemento commensurabilibus. Ergo tota magnitudo alterutri ipsorum est commensurabilis, per eandem* XVI. *Et proinde Scalprum totum Complemento commensurabile erit & quatuor magnitudinibus per se sumptis Commensurabile. Quod erat faciendum.*

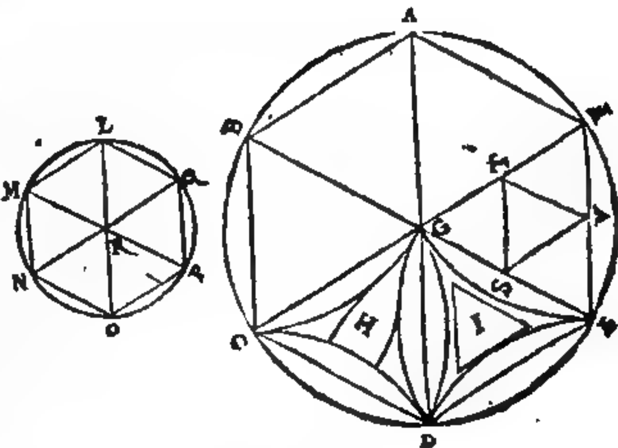
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β. Θεώρημα.

Ὁ κύκλος δύναται τριάκοντα ἓξ τμήματα ἑξαγώνου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου.

PROPOSITIO II. Theorema.

Circulus poteſt triginta ſex ſegmenta Hexagoni ipſi circulo inſcripti.

Circuli LNOP, *cui inſcriptum ſit Hexagonum,* LMNOPQ, *diametrus* LO, *ſit quinta pars quadrati a diametro* AD *circuli* ACDE, *cui inſcriptum eſt Hexagonum* ABCDEF. *Ergo, vt ſupra demonſtratum eſt, triangulum* RNO *trianguli* GDE *eſt quinta*



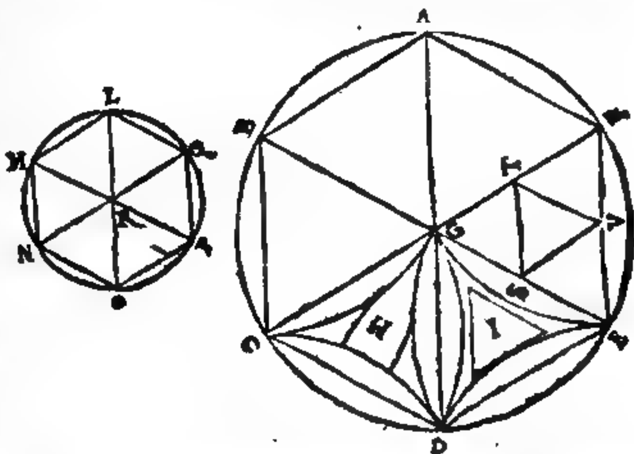
pars. In Complementis Triangulorum GCD, GDE *inſcribantur Segmentum* H, *& triangulum* I *æquale triangulo* RNO. *Itaque Complementum trianguli* GCD *conſtat ex ſegmento, & Reſiduo ſegmenti. Similiter Complementum trianguli* GDE *conſtat ex triangulo, & Reſiduo Trianguli, vt in proxima demonſtratione. Triginta ſegmenta cum ſex Reſiduis Segmenti ſunt æqualia vni circulo. Item triginta Triangula cum ſex ſegmentis ſunt æqualia vni circulo, vt proxime oſtenſum eſt. Sed ſex ſegmenta cum totidem reſiduis ſegmenti ſunt æqualia ſex Complementis, hoc eſt ſex triangulis, & ſex Reſiduis Trianguli. Ergo triginta ſegmenta & totidem triangula cum ſex triangulis & totidem Reſiduis trianguli ſunt æqualia duobus circulis. Atque adeo triginta ſex triangula, & triginta ſegmenta cum ſex reſiduis trianguli ſunt æqualia eiſdem duobus circulis. Rurſus, vt proxima demonſtratione oſtenſum eſt, tria reſidua ſegmenti cum triangulo ſunt æqualia quatuor reſiduis*

trianguli:

trianguli: & consequenter sex residua segmenti cum duobus triangulis sunt æqualia octo residuis trianguli. Quare triginta segmenta cum sex residuis segmenti & duobus triangulis sunt æqualia triginta segmentis cum octo residuis trianguli. Sed triginta segmenta cum sex residuis segmenti & duobus triangulis excedunt circulum duobus triangulis. Ergo triginta segmenta cum octo residuis trianguli excedunt circulum duobus triangulis. Supra vero diximus triginta sex triangula cum triginta segmentis, & sex residuis trianguli esse æqualia duobus circulis. Ergo triginta sex triangula cum triginta segmentis, & octo residuis trianguli excedent duos circulos duobus triangulis. Erunt igitur triginta segmenta cum octo residuis trianguli; item triginta sex triangula simul sumpta triginta octo triangulis cum triginta segmentis & sex residuis segmenti simul sumptis æqualia. Auferantur vtrinque triginta segmenta, & triginta sex triangula. Remanent duo Triangula cum sex Residuis trianguli æqualia octo residuis trianguli. Auferantur vtrinque sex residua trianguli. Remanent duo Triangula æqualia duobus residuis Trianguli, atque adeo æqualia complemento GDE: *cum duo triangula & duo residua trianguli sint æqualia duplo complementi* GDE. *Ergo Complementum diuiditur in duas æquales magnitudines, Triangulum, & Residuum Trianguli. Est igitur Complementum æquale duobus triangulis. In triangulo autem Hexagoni sunt quinque triangula. Complementum vero constat ex duobus. Ergo Triangulum Hexagoni constat ex tribus triangulis & Complemento. Sed constat etiam ex tribus segmentis Hexagoni, & Complemento. Ergo tria segmenta Hexagoni sunt æqualia tribus triangulis. Et proinde in Triangulo Hexagoni* GCD *sunt quinque segmenta aut quinque residua segmenti, aut quinque Triangula, aut quinque Residua Trianguli. Et proinde totum Scalprum Hexagoni est sex segmentorum: & ideo circulus totus* XXXVI *segmentorum: totidem Residuorum segmenti: totidem Triangulorum: totidem Residuorum Trianguli.*

ALITER II.

Quatuor Triangula tribus segmentis, & vni residuo trianguli æqualia sunt: item quatuor Residua Trianguli tribus Residuis Segmenti, & vni Triangulo æqualia, vt proxima demonstratione patuit. Hoc est: quatuor Complemēta quatuor Complementis sunt æqualia. Addantur bina Complementa: nempe triangulum cum suo Residuo, Segmentum cum Residuo Segmenti. Erunt aut quatuor segmenta cum vno Trianguli Residuo, &



consequenter quatuor residua Segmenti cum vno triangulo: aut tria segmenta cum Residuo Trianguli & residuo Segmenti: & consequenter tria residua segmenti cum triangulo & segmento æqualia quinque triangulis cum totidem residuis trianguli. Sit prius. Ergo quatuor segmenta cum residuo trianguli sunt æqualia quinque triangulis. At in triangulo Hexagoni GCD *quatuor segmenta cum residuo segmenti sunt æqualia quinque triangulis. Ergo residuum trianguli, & residuum segmenti sunt æqualia. Quare per communem sententiam* III, *Triangulum segmento est æquale, vt supra: propterea quod à Complemento ablata triangulum aut segmentum, relinquant residua æqualia. Sit posterius. Ergo tria segmenta cum residuo segmenti & residuo trianguli sunt æqualia quinque triangulis, hoc est, triangulo Hexagoni. Sed triangulum Hexagoni constat ex tribus segmentis, & Complemento. Ergo Complementum est æquale residuo trianguli, & residuo segmenti. Sed idem constat ex segmento & residuo segmenti; aut ex triangulo, & residuo trianguli. Ergo residuum segmenti, & residuum trianguli sunt æqualia, vt supra: & propterea segmentum & triangulum æqualia.*

ALITER

ALITER III.

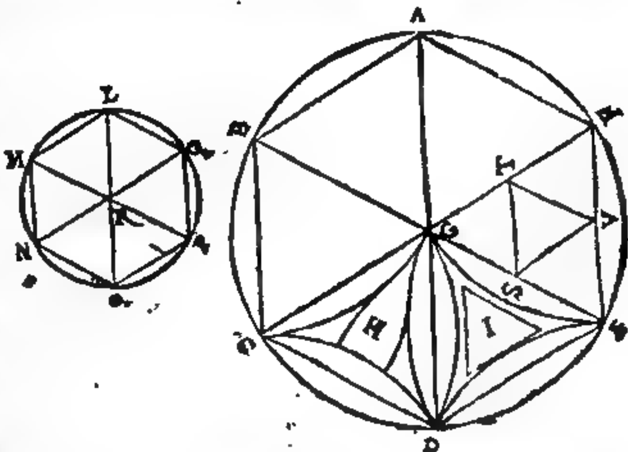
Triginta ſegmenta cum ſex reſiduis ſegmenti ſunt æqualia circulo, vt iam oſtenſum eſt non ſemel. Ergo triginta duo ſegmenta cum octo reſiduis ſegmenti ſunt æqualia vni circulo, & duobus Complementis: id eſt, triginta triangulis, octo ſegmentis, & duobus reſiduis ſegmenti. Sed octo ſegmenta cum duobus reſiduis ſegmenti ſunt æqualia bis triangulo GCD, *hoc eſt decem triangulis. Ergo quadraginta Triangula ſunt æqualia vni circulo, & duobus Complementis. Sed, triginta ſegmenta cum ſex reſiduis trianguli, item triginta ſex triangula, ſunt æqualia duobus circulis, vt paulo ante demonſtrabatur. Triginta igitur ſegmenta cum quadraginta triangulis, & ſex reſiduis trianguli ſunt æqualia duobus circulis cum duobus Complementis præterea. Auferantur igitur triginta ſegmenta cum ſex reſiduis trianguli, item triginta ſex triangula, id eſt duo circuli, a* XL *triangulis, &* XXX *ſegmentis, &* VI *reſiduis Trianguli: hoc eſt, a duobus circulis, & duobus Complementis. Remanebunt quatuor triangula duobus Complementis æqualia. Triangulum igitur eſt æquale reſiduo ſuo, vt ſupra.*

ALITER IIII.

Vnum reſiduum trianguli, & tria ſegmenta ſunt æqualia quatuor Triangulis, vt ſupra demonſtratum eſt. Ergo decem reſidua trianguli cum triginta ſegmentis ſunt æqualia quadraginta triangulis. Rurſus demonſtratum eſt, triginta duo ſegmenta cum octo reſiduis ſegmenti eſſe æqualia vni circulo, & duobus Complementis. Atqui duo ſegmenta cum octo reſiduis ſegmenti ſunt æqualia decem triangulis, vt antea oſtenſum eſt. Auferantur vtrinque tricena ſegmenta. Relinquuntur X *Reſidua trianguli decem triangulis æqualia. Triangulum ergo ſuo Reſiduo æquale, vt antea.*

ALITER V.

Triginta segmenta cum sex residuis segmenti sunt aequalia circulo. Item triginta triangula cum sex segmentis circulo sunt aequalia. Igitur triginta segmenta de circulo dempta relinquunt sex residua segmenti. Et sex segmenta de circulo dempta relinquunt triginta triangula. Ergo per XV *quinti, triginta segmenta de circulo dempta relinquent sex triangula. Sed relinquebant & sex residua segmenti. Ergo sex residua segmenti sex triangulis sunt aequalia. & propterea Triangulum Hexagoni constans ex quinque triangulis constabit & ex totidem residuis segmenti. Sed constat & ex quatuor segmentis cum residuo segmenti. Ablato vtrinque residuo segmenti, remanent quatuor segmenta quatuor residuis segmenti aequalia. Ergo triginta segmenta cum sex residuis segmenti sunt triginta sex segmenta.*



ALITER VI.

Secetur triangulum GEF *in quatuor triangula & sibi inuicem & toti aequalia: quale triangulum* GST. *quod erit isopleurum. & constat triangulum isopleuron non posse secari in multitudinem triangulorum aequalium, & toti aequangulorum, nisi multitudo fuerit numerus quadratus. Quia igitur Triangulum* GST, *est quarta pars trianguli* GEF *ex constructione: & eiusdem triangulum* RNO *est quinta pars: qualium quinque erit triangulum* GST, *talium quatuor erit triangulum* RNO. *Est autem triangulum* GST *maius segmento. Nam quatuor triangula* GST *componunt triangulum* GEF. *At quatuor segmenta sunt minora triangulo eodem* GEF, *aut, quod idem est, triangulo* GCD. *Rursus*

sus Complementum maius est eodem triangulo GST. *Nam eius altitudo & latitudo potest demonstrari longe maior altitudine & latere eiusdem trianguli* GST. *Porro Complementum est ostensum commensurabile segmento, & triangulo* RNO. *Sed* RNO *est commensurabile ipsi* GST. *Ergo per conuersam* XII *decimi,* GST *est Complemento commensurabile. Habemus igitur tres magnitudines inæquales Commensurabiles, Segmentum minimam, triangulum* GST *mediam, Complementum maximam. Et quidem vigintiquatuor Triangula* GST *cum sex segmentis componunt circulum. Rursus eundem componunt viginti quatuor segmenta cum sex complementis. Ergo per* VIII *quinti, maior est ratio* XXIIII *triangulorum* RST *ad* VI *segmenta, quam* XXIIII *segmentorum ad* VI *Complementa. Sunt autem illa magnitudines commensurabiles, vt iam dictum est. Ergo habent rationem inter se, quam numerus ad numerum, per* VI *decimi. Erit igitur minor magnitudo maioris aut pars, aut partes, per* IIII *&* V *septimi: quandoquidem illi numeri, ad quos rationem habent, communem mensuram habent saltem vnitatem. Infiniti vero numeri sumi possunt, quorum minimus vicesies quater sumptus cum maximo sexies componat summam eandem, quam medius quater & vicesies sumptus cum sexies minimo. Neque vero finis aut modus futurus est eiuscemodi numerorum. Finiamus igitur medium, & sit, vt iam diximus, triangulum* GST *quinque, quantorum viginti triangulum totum* GEF. *Quia igitur segmentum minus est, quam Triangulum* GST, *minus erit proinde, quam quinque. Erit igitur aut tria, aut quatuor, & nihil præterea. Esto primum tria. Ergo Complementum erit vndecim. Nam vicesies quater tria, cum sexies vndecim component eandem summam, quam vicesies quater quinque cum sexies tribus. Erit enim summa* CXXXVIII. *Quæ distributa in tria dabit quadraginta sex segmenta in circulo. Hoc modo Residuum Segmenti fuerit æquale segmentis duobus, cum duobus trientibus segmenti: quod est ineptissimum, καὶ ὀφθαλμοφανὲς ἄτοπημα, vt Geometrice refutandum non sit. Omnino igitur Segmentum erit quatuor, quantorum quinque triangulum* GST. *Ergo*

 Com-

Complementum erit octo: atque ita duplum segmenti. Quare segmentum & residuum segmenti sunt æqualia. ac propterea Complementum æquale duobus Segmentis: & totum scalprum sex segmentis, vel sex triangulis RNO. *Et totus igitur circulus æqualis* XXXVI *segmentis: totidem residuis segmenti: totidem triangulis* RNO: *totidem residuis eiusdem trianguli* RNO.

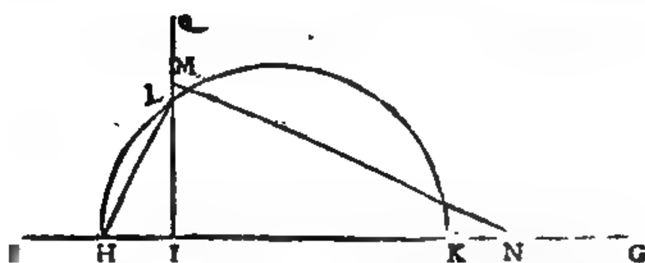


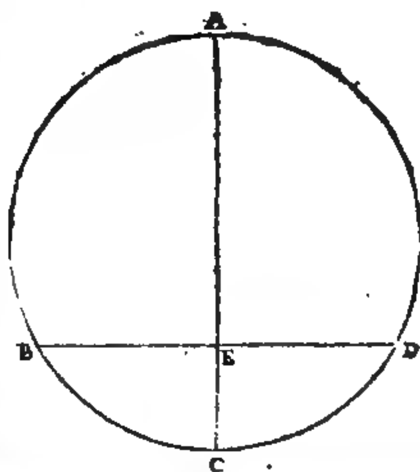
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ. Πρόβλημα.

Κύκλου δοθέντος τὸ ἐμβαδὸν εὑρεῖν.

PROPOSITIO III. Problema.

Circuli dati aream inuenire.

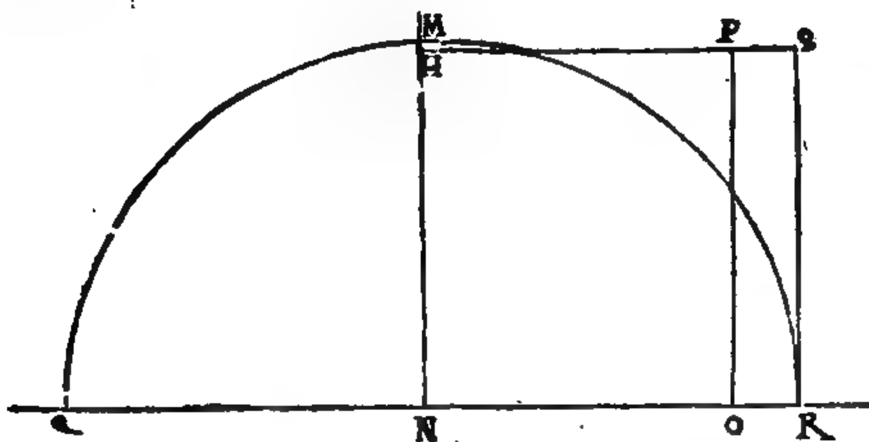




Circuli dati ABCD *inuenienda sit potentia. Inscribatur in ipso latus trigoni isopleuri* BD. *Ex infinita linea* FG *abscindatur recta* HK *æqualis potentiæ Hexagoni circulo dato* ABCD *inscribendi, hoc est, rectangulo sub* BD, EA. *Super eadem recta* HK *semicirculo* HLK *descripto, abscindatur recta* HI, *quinta pars ipsius* HK, *per* IX *sexti. Signo* I, *erecta perpendiculari infinita* IQ, *per* XI *primi, connectatur recta* HL: *quæ per Corollar.* VIII *sexti, erit media proportionalis inter* HK, HI. *Quia igitur vt est longitudo* HK *ad longitudinem* HI, *ita quadratum* HK *ad* HL: *erit quadratum* HL *quinta pars quadrati* HK. *Ex infinita perpendiculari* IQ *abscindatur recta* IM *æqualis ipsi* HL, *per* III *primi. Ex infinita autem* FG *itidem abscindatur recta*

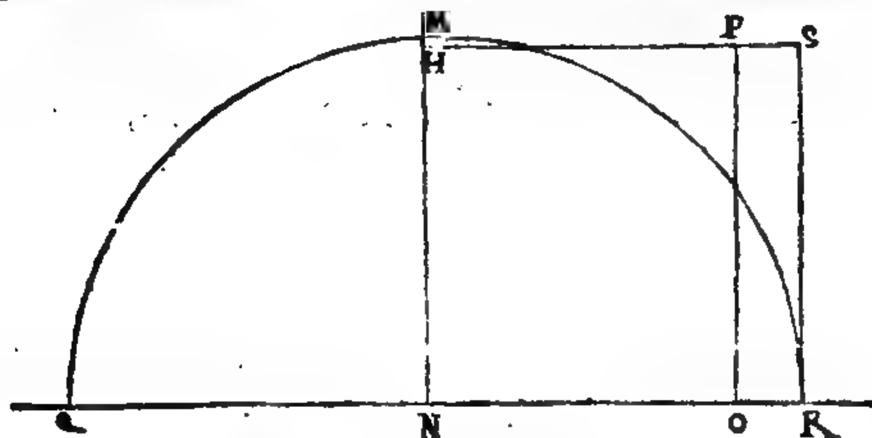
recta IN *æqualis ipsi* HK. *Connectatur recta* MN. *Itaque quadratum ex* MN *erit æquale quadratis ex* IM, IN, *per* XLVII *primi: hoc est quadratis ex* HL, HK. *Sed quadratum* HL *est quinta pars quadrati* HK, *ex constructione. Ergo quadratum* MN *est sextuplum quadrati* HL. *quod aio esse τὸ ἐμβαδὸν circuli dati* ABCD. *Cum enim potentia Hexagoni, hoc est, quadratum* HK, *sit æqualis triginta segmentis ipsius Hexagoni, vt proxime demonstratum est, quadratum autem* HL *sit eius pars quinta: poterit igitur quadratum* HL *sex segmenta Hexagoni. Quare quadratum* MN *sextuplum quadrati* HL *poterit sexies sex segmenta Hexagoni circulo* ABCD *inscribendi. Erit igitur quadratum* HK *τὸ ἐμβαδὸν ipsius propositi circuli* ABCD, *per* V *definitionem, adiuuante etiam antecedente.*

ALITER.



Sit diametrus AC *circuli propositi* ABCD *expositarum partium* XX. *Ex interminatis* QR, NM *sese normaliter secantibus in* N *abscindantur* NO *quidem ipsi* EA, NR *autem* XVIII *vicesimis diametri* AC *æqualis. Igitur qualium* XV *est* NO *(nempe tres quadrantes diametri) talium* NR *est* XVIII: *aut qualium* NO *est* V, *talium* NR *est* VI. *Ex* NM *&* QR *abscindantur* NH, NQ *ipsi* BD *æquales. Quare* NQ, NH *inter se erunt æquales, per communem sententiam primam. Compleantur parallelogramma rectangula* NP, NS: *quæ quidem erunt inter se, vt longitudines* NO, NR, *per primam*

primam VI. *Erunt igitur ut* V *ad* VI: *hoc est, ut* XXX *ad* XXXVI. *Sed rectangulum* NP *contentum sub* NO, NH, *hoc est, sub* EA, BD, *est aquale Hexagono. Ergo per antecedentem rectangulum* NS *est*



aquale circulo. Et propterea circa QR *semicirculo descripto* QMR, *recta* NM *media proportionalis inter* NR, NQ, *id est,* NH, *vel* EA, *erit aqualis τῷ ἐμβαδῷ prius inuento. Quod erat faciendum.*

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἴσον ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τριγώνου ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένου καὶ ἐννέα δεκάτων τῆς διαμέτρου περιεχομένῳ.

COROLLARIVM.

Ex his patet, circuli aream esse æqualem rectangulo sub latere trianguli æquilateri in eo ipso inscripti circulo, & nouem decimis diametri concepto.

Nam qualium diametrus AC *fuerit* XX, *talium* XVIII *posita est* NR. *Ergo qualium diametrus* AC *est* X, *talium est* IX *recta* NR. *A diametro igitur* AC *auferenda sunt* $\frac{9}{10}$ *per* IX *sexti, & habebis* NR. *&c.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ex hac demonstratione, & ex antecedenti, manifestum est, si diametrus circuli fuerit expositarum partium XVI, τὸ ἐμβαδὸν maius fore, quam 199, minus autem, quam 200: cum Hexagonum minus sit, quam 167, cuius quinta pars composita cum ipso faciet potentiam minorem, quam 200.

ΠΡΟ-

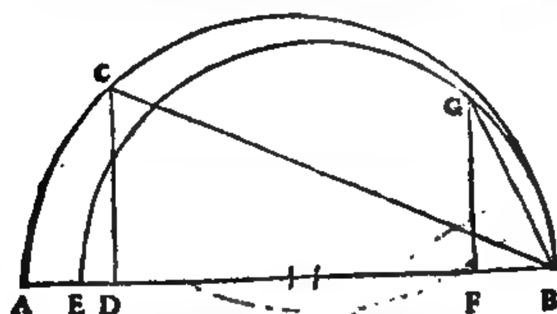
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ. Πρόβλημα.

Τοῦ ἐμβαδοῦ δοθέντος περιαναγράψαι τὸν κύκλον ὅπερ ἐστὶν ἐμβαδόν.

PROPOSITIO IIII. Problema.

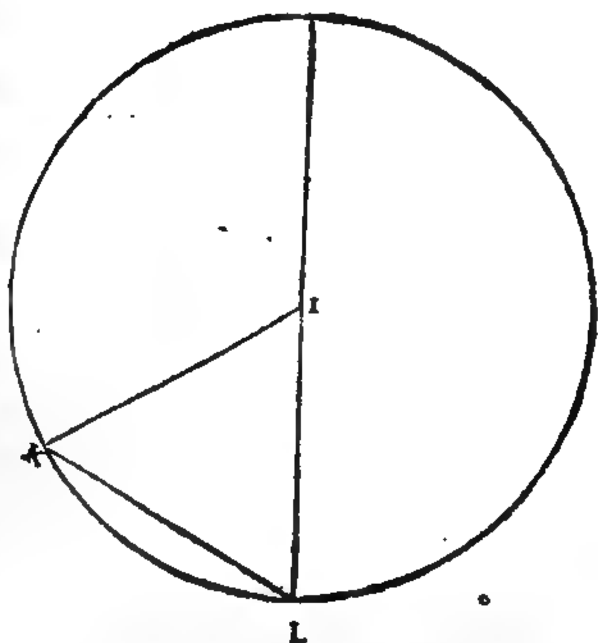
Circuli area data, describere circulum, cuius sit area.

Potentia circuli data AB *sit inueniendus congruens circulus. Descripto super ea semicirculo* ACB, *auferatur sexta pars eius* AD. *Tum erecta perpendiculari* DC, *connectatur recta* CB: *quæ per Coroll.* VIII *sexti, erit media proportionalis inter* AB, DB: *hoc est,*





inter sex, & quinque, ex constructione. quia qualium AB *est sex, talium* DB *erit quinque. Erit ergo* CB *Hexagoni potentia circulo inscripti, cuius circuli potentia est recta data* AB. *cui potentia* BC *æqualis longitudo* EB *auferatur ex longitudine* AB. *Super qua descripto semicirculo* EGB, *abscissa* FB, *sexta parte ipsius* EB, *& erecta perpendiculari* FG, *erit iuncta* BG *sexta pars Hexagoni: hoc est potentia trianguli*



Hexa-

Hexagoni: quod est æquilaterum, per XV *quarti. Triangulo igitur æquilatero cuicunque* H *fiat simile triangulum* I K L, *æquale autem quadrato* BG *per* XXV *sexti. Rursus centro* I *interuallo* I L, *describatur circulus* K L. *qui est circulus quæsitus: cum* I K L *ex constructione sit sexta pars quadrati ipsius* E B, *hoc est ipsius Hexagoni. Quod erat faciendum.*

ALITER.

Idem expeditius fiet, si præter propositum ἐμβαδὸν *habeatur & alius circuli cuiuscunque* ἐμβαδὸν, *per antecedentem: & fiat vt* ἐμβαδὸν *illius circuli ad* ἐμβαδὸν *propositum, ita diametrus circuli ad quartam magnitudinem, per* XII *sexti. quæ erit diametrus quæsiti circuli, per secundam duodecimi, quam miror cur Euclides demonstrarit violenta* ἀπαγωγῇ εἰς τὸ ἀδύνατον, *cum ex antecedente potuerit demonstrare quadratum circuli ad quadratum circuli esse, vt quadratum diametri, ad quadratum diametri. potentia autem circuli est minor diametro. Ergo accommodata circulo erit latus Polygoni alicuius circulo inscripti, &c.*

ΠΡΟ-

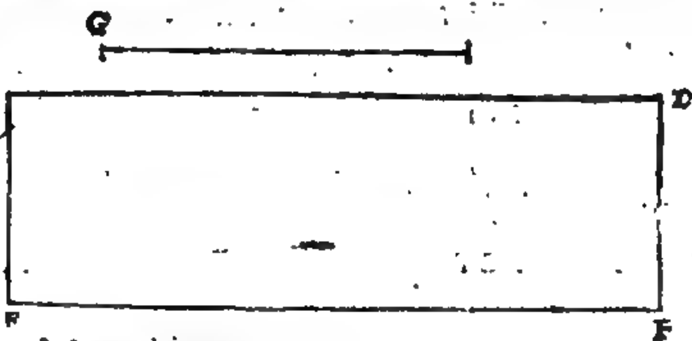
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε. Θεώρημα.

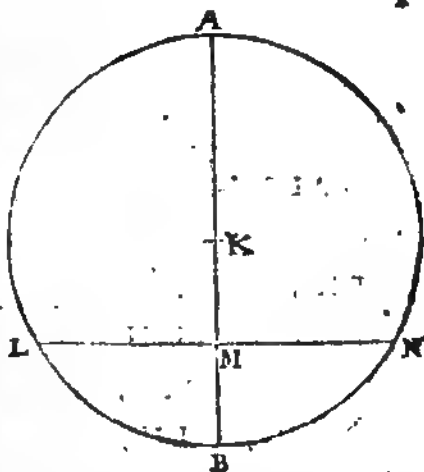
Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ εὐθεῖαν τῆς τοῦ κύκλου ἡμιπεριμέτρου ἐλάσσω.

PROPOSITIO V. Theorema.

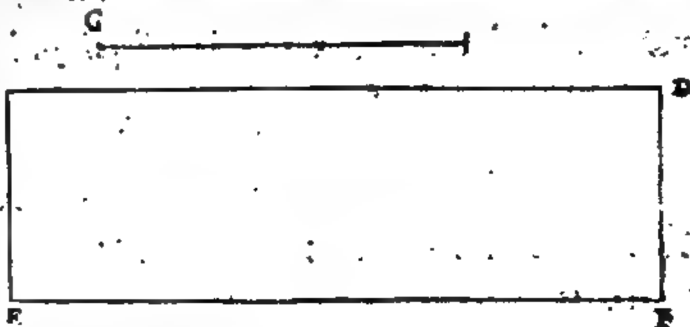
Potentia circuli ad ſemidiametrum applicata latitudinem facit rectam ſemiambitu circuli minorem.

Recta G, *τὸ ἐμβαδὸν ſcilicet circuli* ALBN, *cuius diametrus* AB, *centrum* K, *applicetur per* XLIIII *primi, ad* KA *ſemidiametrum, vel ei ſumptam æqualem* EC, *& faciat latitudinem* CD, *id eſt,* EF. *Aio* EF *eſſe minorem ſemiperimetro circuli propoſiti* AB. *Eſto diametrus* AB *expoſitarum partium* XVI. *Circulo autem* ALBN *accommodetur latus trigoni iſopleuri* LN, *ſecans diametrum* AB *in* M. *Itaque, vt alibi oſtenſum eſt, recta* LN, MA *potentia tantum inter ſe ſunt commenſurabiles. Hexagoni autem potentia eſt æqualis rectangulo ſub iiſdem* MA, LN. *Ergo per viceſimam ſecundam* X *Elementi, potentia Hexagoni eſt recta ἄλογος, quæ dicitur μέση. Sed & quinta eius pars eidem commenſurabilis eſt ἄλογος, per* XXIIII *eiuſdem. Ergo tam Hexagonum, quam quinta pars Hexagoni ipſi ἐμβαδῷ ex vtraque compoſito erunt commenſurabilia. Ideo iterum per eandem* XXIIII, *totum ἐμβαδὸν eſt ἄλογον, τὸ λεγόμενον μέσον. Igitur τὸ ἐμβαδὸν ad ῥητὴν* KA,

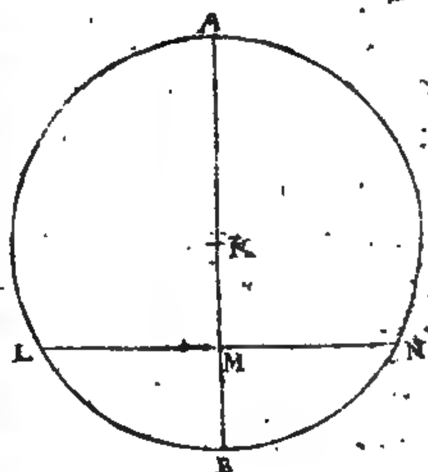




vel ei æqualem CE *applicatum faciet latitudinem* EF *ipsi* AK, *vel ei sumptæ æquali* EC, *potentia tantum commensurabilem, per* XXIII *decimi. Quæ sane minor est, quam* XXV *sextadecimæ diametri* AB. *Si enim esset præcise* XXV; *esset τὸ ἐμβαδὸν toties quinque*

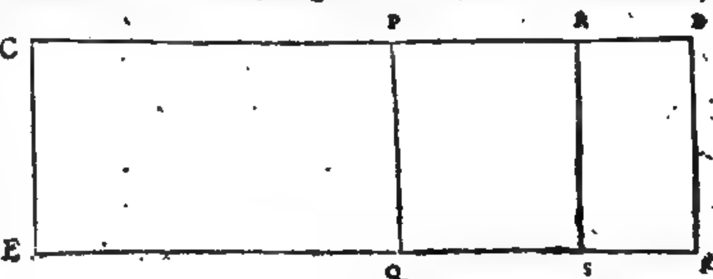


E F, viginti sextarum decimarum diametri, quot sunt tales sextadecimæ in semidiametro. Et propterea τὸ ἐμβαδὸν esset 200 *præcise. Atqui minus est, quam* 200, *per Scholion* III *huius. Est igitur recta* EF *minor, quam* XXV *sextadecimæ diametri. At circuli, cuius diametrus* XVI *expositarum partium, semiperimetrus est maior, quam sint* XXV *sextadecimæ diametri. Ergo multo minor est* EF, *quam semiambitus circuli. Quod erat demonstrandum.*



ALITER.

Repetatur eadem constructio, sitque rectangulum CF *æquale circulo* ALBN. *Abscindatur recta* EQ *æqualis ipsi* LN, *hoc est lateri trigoni isopleuri circulo* ALBN *inscripti. Rursus esto rectangulũ* ER *æquale Hexagono circulo* ALBN *inscribendo, hoc est, rectangulo sub* LN, *vel* EQ *(ex constructione) contento. Ergo per primam* VI, *erit* EP *ad* ER, *vt* EC *longitudo ad longitudi-*



gitudinem MA, *cum eandem altitudinem habeant, rectam* EQ, *vel* LN. *Sed* EC, *hoc est* KA, *semidiametrus circuli* ALBN, *ad* MA, *habet subsesqualteram rationem. Ergo* EP *ad* ER *habet subsesqualteram rationem. Qualium igitur* XXX *est* ER, *talium* XX *est* EP. *Atque adeo* EP *est aequale* XX *segmentis Hexagoni, vt* ER *triginta segmentis. Qualium igitur duum est* EP, *talium trium est* ER. *Ideoque qualium* ES *est trium, talium duum est* EQ, *per conuersam prima sexti. Igitur qualium nouem est quadratum a recta* ES, *talium quatuor est a recta* EQ. *Rursus esto diametrus* AB *circuli* ALBN *expositarum partium* 120. *Qualium igitur* 3600 *est quadratum a semidiametro*, KA, *hoc est a recta* EC, *talium* 10800 *est quadratum a recta* LN, *idest, a recta* EQ, *ex constructione, per* XII *tertiidecimi Elementi. Quia vero iam demonstratum est, quadratum ab* EQ *esse ad quadratum ab* ES, *vt quatuor ad nouem: Ergo recta* ES *est commensurabilis recta* EQ, *quam & quadrato ab* EC *esse potentia commensurabilem, per* XXIII *decimi demonstrari poterat. Ergo qualium* 10800 *quadratum ab* EQ, *talium* 24300 *est quadratum ab* ES. *Sed rectangulum* ER *ad rectangulum* ED, *est, vt* XXX *ad* XXXVI, *vel vt* V *ad* VI. *Ergo per conuersam prima* VI, ES *ad* EF *est vt* V *ad* VI. *Et proinde, quadratum ab* ES *ad quadratum ab* EF, *vt* XXV *ad* XXXVI. *Itaque qualium* 24300 *ostensum est quadratum* ES, *talium* 34992 *est quadratum a tota* EF. *Sed semiperipheria* ANB *est* 36000, *qualium nimirum quadratum a diametro est* 14400. *Quare recta* EF, *hoc est* τὸ πλάτος τοῦ ἐμβαδοῦ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου παραβαλλομένου, *est minor semiperimetro circuli, excessu* $\frac{7}{243}$. *Quod erat demonstrandum.*

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐλάσσόν ἐστι τοῦ τριγώνου ὀρθογωνίου, οὗ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν ἡ μὲν τῇ ἐκ κέντρου, ἡ δὲ τῇ περιμέτρῳ ἴση ἐστίν.

COROLLARIVM I.

Ex his constat, quod potentia circuli minor est Triangulo rectangulo, cuius eorum, quæ rectum angulum continent, laterum, alterum quidem semidiametro, alterum autem ambitui circuli est æquale.

Ergo Archimedis prima propositio περὶ μετρήσεως κύκλου, vitiosa est: vt taceam, quod minorem sumit ambitum siue perimetrum, quam re vera sit. Itaque cum id demonstrare non posset, vsus est τῇ εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῇ. quæ est παραλογιστικὴ, cum ea accommodari poßit ad quodlibet triangulum rectangulum, siue minus, siue maius proposito: quandoquidem ea vtitur ad falsum colligendum. Ex his quoque colligitur falsitas τῶν τετραγωνιζουσῶν γραμμῶν, de quibus veteres scripserunt, inter quos Hippias: præsertim illius, quam excogitauerat Dinostratus. quæ, vt & aliæ, falso τετραγωνίζουσαι dictæ sunt, cum eæ non ad τετραγωνισμὸν κύκλου idoneæ sint, sed ad quadrantem perimetri duntaxat inuestigandum.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Ἔτι φανερὸν, ὅτι κυλίνδρου ἐπιφάνεια οὗ τὸ ὕψος τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως ἴσον ἔχοντος μείζων ἐστὶν ἡ τετραπλασία τοῦ κύκλου.

COROLLARIVM II.

Præterea patet superficiem cylindri, cuius altitudo æquet diametrum basis, esse maiorem quadrupla circuli.

Τὸ ἐμβαδὸν *ad semidiametrum applicatum facit latitudinem rectam minorem semiperimetro. Ergo quadruplum τοῦ ἐμβαδοῦ ad totam diametrum applicatum faciet* πλάτος *rectam minorem tota perimetro. At cylindri superficies est æqualis rectangulo sub tota diametro, & tota perimetro contento. Maior igitur superficies cylindri quadrupla circuli superficie. Quare quadruplum circuli minus est,*

quam

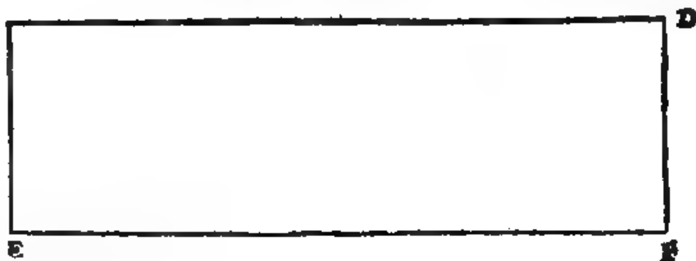
quam 797, aut non multo maior. Superficies autem cylindri maior, quam 809, qualium nempe totius diametri quadratum fuerit 256. Magnum ſane præſtitit diuinus Archimedes, quod hæc proxime abſunt à vero. Nihil tamen fecit, quod hæc ſunt ἀγεωμέτρητα. Imo tanto ingenio indigna ſunt omnia. Denique hoc Corollarium aduerſatur iis, quæ idem Archimedes per impoßibile conatur demonſtrare XIII, *&* XIIII *prioris* περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

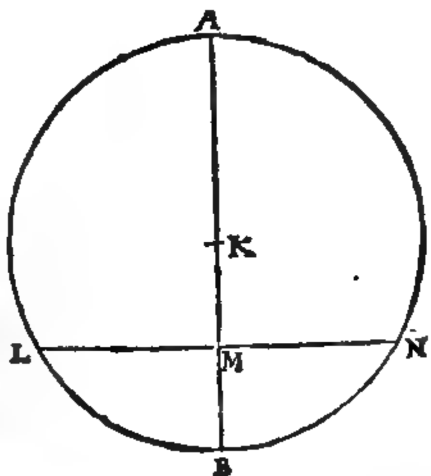
Πρὸς τούτοις δῆλον, ὅτι τὸ διπλάσιον τοῦ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ εὐθεῖαν τοῦ τριπλασίου τῆς διαμέτρου μείζω ἐλάσσονι, ἢ τῶν δέκα ἑβδομηκοστομόνων.

COROLLARIVM III.

Patet præterea, duplum circuli ad ſemidiametrum applicatum, latitudinem facere rectam triplo diametri maiorem parte, quæ ſit minor, quam decem ſeptuageſimæprimæ.



Oſtenſum enim eſt, πλάτος EF. *quod ſit a circulo ad ſemidiametrum applicato, poſſe talia 34992, qualia quadratum ſemidiametri* EC 3600, *aut qualia tota diametrus* AB *circuli* ALBN 14400. *Quod ſi duplum circuli ad eandem* EC *applicetur: erit* πλάτος EF *quoque duplum: & propterea quadratum a dupla* EF *erit quadruplatum, vt futurum ſit* 139968, *qualium quadratum a tripla diametri* 129600, *vtique minus, quam quadratum a dupla* EF. *Exceſſus enim eſt* $\frac{2}{25}$ *duntaxat. Jam*



vna

una ſeptuageſimaprima de longitudine diametri, quam expoſuimus partium 120, *eſt* $1\frac{49}{71}$. *& talia decem ſunt* $16\frac{64}{71}$. *Quæ ſi adiungantur triplo longitudinis diametri, fient ſimul* $376\frac{64}{71}$. *A quibus quadratum paulominus eſt* 141433. *quod longe maius eſt, quam* 139968. *Vides quantum profecerit Archimedes ſuis ἀπαγωγαῖς εἰς τὸ ἀδύνατον, adeo ut ſi ſententiam eius ſequamur, duplum circuli ad ſemidiametrum applicatum faciet latitudinem ſupra triplum diametri maiorem, quam* $\frac{10}{71}$.

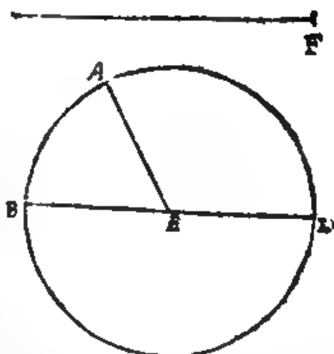
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ. Πρόβλημα.

Ἐν κύκλῳ πᾶς τομεὺς ἐστὶν ἐπιφάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως, κώνου ἰσοσκελοῦς τὴν πλευρὰν τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσην ἔχοντος.

PROPOSITIO VI. Theorema.

In circulo omne Scalprum eſt ſuperficies, præter baſim, coni iſoſcelis latus ſemidiametro circuli æquale habentis.





In circulo ABD, *cuius centrum* E, *diametrus* BED, *datum ſit Scalprum* EADE. *Aio Scalprum* EADE *eſſe ſuperficiem, præter baſim, Coni iſoſcelis, cuius coni latus fuerit æquale ſemidiametro* EA. *Eſto recta* F *æqualis peripheriæ* AD, *per* VII *Cycloperimetrici. Recta autem* GH *eſto decima pars quadrati a recta* F. *Erit igitur recta* GH *diametrus circuli, cuius circuli perimetrus fuerit æqualis peripheriæ* AD, *per* III *huius. Diuiſa* GH *bifariam in* I, *fiat triangulum orthogonium* IKG *ita ut latus* KG *ſubtendens rectum angulum* KIG *ſit æquale ſemidiametro* EA. *Sane manente* IK *immobili, triangulum* IKG *circumactum a puncto* G, *donec ad idem reuoluatur, faciet conum* KGH, *per* XVIII *definit.* XI *Elementi, cuius baſis diametrus* GIH *eſt de-*

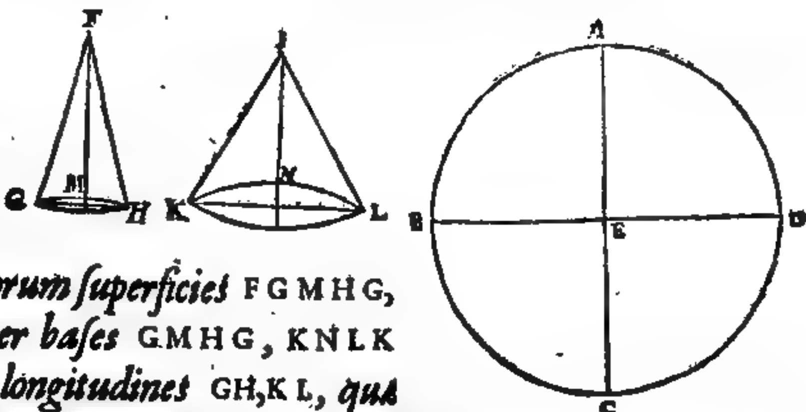
est decima pars quadrati a peripheria A D : *latus autem* K G *semidiametro* E A *æquale : & circulus basis* G L H G *æqualis peripheriæ* A D. *Quare vertice* K *posito in centro* E, *& puncto* G *in* A, *recta quidem* K G *rectæ* E A *conueniet, ex constructione. Circulus vero* G L H G *reuolutus describet peripheriam* AD, *quandoquidem perimetrus circuli* GLH *qui est basis coni* KGH, *est æqualis peripheriæ* AD, *ex constructione. Jccirco recta* K G *rectæ* E A *conueniens, a puncto* A *incipiens moueri, cum in rectam* E D *inciderit, toto circumactu basis conicæ* G L H G *totam peripheriam Scalpri peragrauerit. Atque adeo rectæ* E A, E D *conuenientes simul, in vnam rectam* K G *coalescent : vt videlicet peripheria* A D, *in vnam peripheriam* G L H G. *Quare Scalprum* E A D E *superficiei* K G H, *præter basim* GLHG, *est æquale. Quod erat demonstrandum.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ. Θεώρημα.

Αἱ τῶν κώνων ἰσοσκελῶν τῶν ἴσα κλίματα ἐχόντων ἐπιφάνειαι, χωρὶς τῆς βάσεως, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ τῶν βάσεων διάμετροι.

PROPOSITIO VII. Theorema.

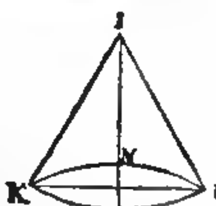
Superficies, præter basim, Conorum isosceleon æqualia latera habentium sunt inter se, vt basium diametri.

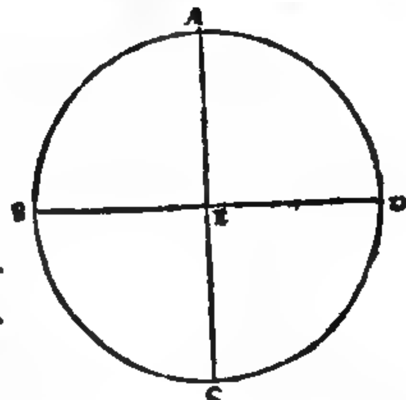


Conorum isosceleon FGH, I K L κλίματα, *siue latera* FG, I K, *sunto æqualia. Aio eorum superficies* F G M H G, I K N L K, *præter bases* G M H G, K N L K *inter se esse, vt longitudines* GH, K L, *quæ sunt diametri circulorum* G M H G, G N L K *basium in Conis propositis. Interuallo rectæ* E A, *quæ sit æqualis lateri Conorum* F G, *aut* I K, *describatur circulus* A B C D, *in quo diametri* A C, B D *secent*

ſeſe normaliter. Per antecedentem, ſuperficies FGMHG Scalpro EADE: ſuperficies autem IKNLK ſemicirculo BADEB eſto æqualis. Per eandem erit peripheria GMHG peripheriæ AD; peripheria autem KNLK peripheriæ BAD æqualis. Aut contra, ſi ponamus peripheriā GMHG peripheriæ AD, & peripheriam KNLK peripheriæ BAD æquales, erit ſuperficies FGMHG ſcalpro EADE, ſuperficies vero IKNLK ſemicirculo BADEB æqualis. Eſto diametrus AC expoſitarum partium XII.







Qualium 1440 erit quadratum a perimetro ABCDA, talium 360 erit quadratum à peripheria BAD, & talium 90 AD. Qualium igitur 360 perimetrus circuli KNLK talium 90 erit GMHG. Et quadratum diametri GH talium 9 erit, qualium 36 tota KL. Atque ideo qualium XII expoſitarum partium erit longitudo AC, talium III erit longitudo GH, & talium VI longitudo KL. Dupla igitur eſt ratio longitudinis KL ad longitudinem GH. Sed & dupla eſt ratio ſemicirculi BADEB ad quartam circuli EADE. Erit itaque vt longitudo GH ad longitudinem KL, ita potentia BADEB ad potentiam EADE. Hoc eſt ſuperficies FGMHG ad ſuperficiem IKLNK. Quare αἱ τῶν κώνων, &c. Quod erat demonſtrandum.

ALITER.

QVÆ pars eſt peripheria Scalpri totius perimetri circuli, eadem pars eſt ipſum Scalprum ipſius circuli. Similiter quia in circulo Scalprum Scalpri aut pars eſt, aut partes, aut, ſi libet, incommenſurabile: omnino eadem pars, aut eadem partes, aut incommenſurabile Scalprum; erunt peripheria Scalpri peripheriæ alius Scalpri. Vt igitur peripheria Scalpri ad peripheriam Scalpri, ita Scalprum ad Scalprum. Sed vt peripheria ad

ria ad peripheriam, ita decima pars quadrati peripheriæ ad decimam partem quadrati peripheriæ, per XV *quinti. Ergo per* XI *eiusdem, vt decima pars quadrati peripheriæ ad decimam partem quadrati peripheriæ, ita Scalprum ad Scalprum. Sed Scalpra sunt æqualia superficiebus conicis: & decimæ partes peripheriarum basium sunt diametri ipsarum basium conicarum. Ergo vt diametrus basis conicæ ad diametrum basis conicæ, ita superficies conica ad superficiem conicam, excepta basi scilicet. Quod erat demonstrandum.*

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι πᾶς μὲν κῶνος ἰσοσκελὴς τὴν μὲν ἐπιφάνειαν, χωρὶς τῆς βάσεως, τῷ δοθέντι ἡμικυκλίῳ ἴσην ἔχων, τὸ δὲ κλίμα τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τὴν διάμετρον τῆς βάσεως τῷ κλίματι ἴσην ἔχει.

COROLLARIVM I.

Patet omnem Conum isoscelea, qui superficiem, excepta basi, æqualem habuerit semicirculo dato, diametrum basis suæ lateri suo æqualem habere.

Demonstratum enim est, diametrum basis KL *æqualem esse semidiametro* ED. *At latus* LI *eidem est æquale ex hypothesi.*

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Πάλιν οὐ δοθήσεται κῶνος τὸ μὲν κλίμα τῇ ἡμιδιαμέτρῳ, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῷ ὅλῳ κύκλῳ ἴσην ἔχων.

COROLLARIVM II.

Rursus non dabitur Conus, cuius latus semidiametro circuli, superficies autem toti circulo sit æqualis.

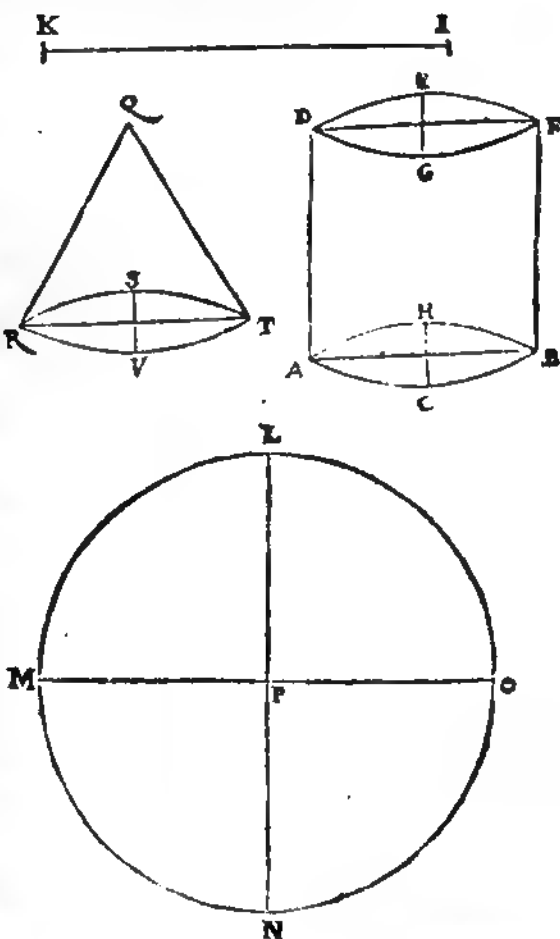
Nam data superficie æquali circulo, latere æquali semidiametro, necessario diametrus basis conicæ diametro circuli erit æqualis, per antecedentem. Quod est impossibile, per XXI *vndecimi, & per* XV *prioris περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Archimedis.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η. Θεώρημα.

Ἐὰν τοῦ κυλίνδρου ὀρθοῦ ὕψος τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ἴσον ᾖ, ὁ κῶνος ἰσοσκελὴς ὁ τὸ μὲν κλίμα τῷ τοῦ κυλίνδρου ὕψει, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῷ ἡμίσει τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας, χωρὶς τῶν βάσεων, ἴσην ἔχων τὴν βάσιν τῆς τοῦ κυλίνδρου βάσεως μείζω ἕξει.

PROPOSITIO VIII. Theorema.

Si cylindri recti altitudo & diametrus basis eius æquales fuerint, Conus isosceles, cuius latus est æquale altitudini cylindricæ, superficies autem dimidiæ superficiei cylindricæ, excepta vtraque basi, basim habebit basi cylindrica maiorem.



Esto cylindrus rectus AF, *cuius altitudo* AD *æqualis sit diametro* AB *circuli* AHBC, *qui est basis cylindri. Aio basim coni, cuius latus sit æquale altitudini* AD; *superficies autem dimidio superficiei cylindricæ, exceptis basibus* AHBCA, DEFGD, *esse maiorem alterutra basi cylindri, hoc est circulo* AHBCA, *aut* DEFGD. *Sit igitur quadratum a recta* KI *æquale superficiei cylindricæ, exceptis basibus: nempe media proportionalis inter diametrum* AB, *siue altitudinem* AD, *& peripheriam* AHBCA: *sitque ei congruens circulus* LMNO, *per* IIII *huius. Cuius*

diametri

diametri LN, MO *sese* πρὸς ὀρθὰς *secanto. Rursus coni* RQT *latus, siue* κλίμα RQ, *& diametrus* RT *basis* RSTVR, *sunto aequalia semidiametro* PO. *Ergo per* VI *huius, erit conica superficies* QRSTVR *aequalis semicirculo* MLOPM. *ac propterea cylindrica superficies superficiei conicae dupla. Porro potentia circuli ad semidiametrum applicata facit* πλάτος *rectam minorem semiperimetro circuli, per* XVIII *huius. Ergo media proportionalis inter semidiametrum, & semiperimetrum est maior potentia circuli. & media inter totam diametrum & totam perimetrum maior quadruplo circuli. Erit igitur circulus* LMNO *maior quadruplo circuli* AHBCA: *& quadratum diametri* LN *maius quadruplo a diametro* AB, *per secundam* XII. *Ideo longitudo* LN *maior duplo longitudinis* AB: *hoc est, longitudo* PO, *vel* RT, *maior longitudine* AB. *Et per* XXII *sexti, quadratum* PO, *vel* RT, *maius quadrato* AB. *Et per* II *duodecimi, circulus* RSTVR *maior circulo* AHBCA. *Quod si manente integra superficie* RSTQ, *latus* QR *minus fuerit, vtpote aequale altitudini* AD, *necessario circulus basis conicae maior erit circulo* RSTVR. *Est autem latus* AD *minus latere* QR, *vt ostensum est. Ergo si latus coni fuerit aequale altitudini cylindri* AD, *multo maior erit circulus basis conicae, quam circulus basis cylindricae. Quod erat demonstrandum.*

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἡ ἐπιφάνεια, χωρὶς τῶν βάσεων, μείζων ἐστὶ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου.

COROLLARIVM I.

Patet omnis cylindri recti superficiem, exceptis basibus, maiorem esse circulo, cuius semidiametrus est media proportionalis lateris cylindri, & diametri basis cylindricae.

Haec euertunt propositionem XIII *libri prioris* περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου

κυλίνδρου Archimedis. Si igitur diametrus basis cylindricæ fuerit XVI *partium expositarum, altitudo autem cylindri recti æqualis diametro: erit superficies cylindrica, exceptis basibus, maior, quam* 809, *qualium quadratum a diametro* 256. τὸ ἐμβαδὸν *autem est minus quam* 200. *Ergo quadruplum* τοῦ ἐμβαδοῦ *minus, quam* 800. *ac propterea media proportionalis inter latus cylindri, & diametrum basis, hoc est diametrus ipsa, erit minor semidiametro circuli, cuius* ἐμβαδὸν *est maius, quam* 809.

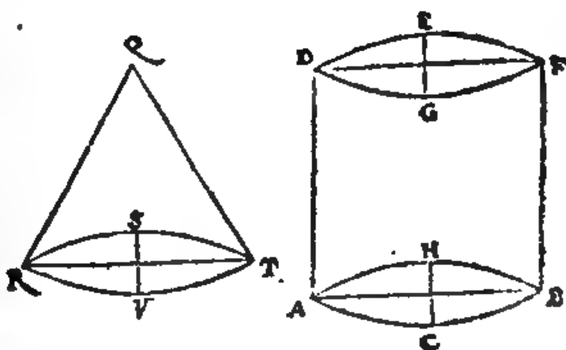
ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Πάλιν ὅτι παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς, χωρὶς τῆς βάσεως, ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου, καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου.

COROLLARIVM II.

Rursus patet, omnis coni isoscelis, excepta basi, superficiem maiorem esse circulo, cuius circuli semidiametrus media est proportionalis inter latus coni & semidiametrum circuli basis conicæ.

Et hæc quoque contra XIIII *Archimedis ex eodem libro. & eadem demonstratio est cum superioris Corollarij demonstratione, per* XV *quinti, cum coni* QRT *superficies sit dimidium superficiei cylindri* AF.



ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

Ἔτι ὅτι παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κυλίνδρου ὀρθοῦ ἐπιφανείας τοῦ τήν τε πλευρὰν καὶ τὴν βάσιν τῇ τε πλευρᾷ καὶ τῇ βάσει τοῦ κώνου ἴσην ἔχοντος.

COROLLARIVM III.

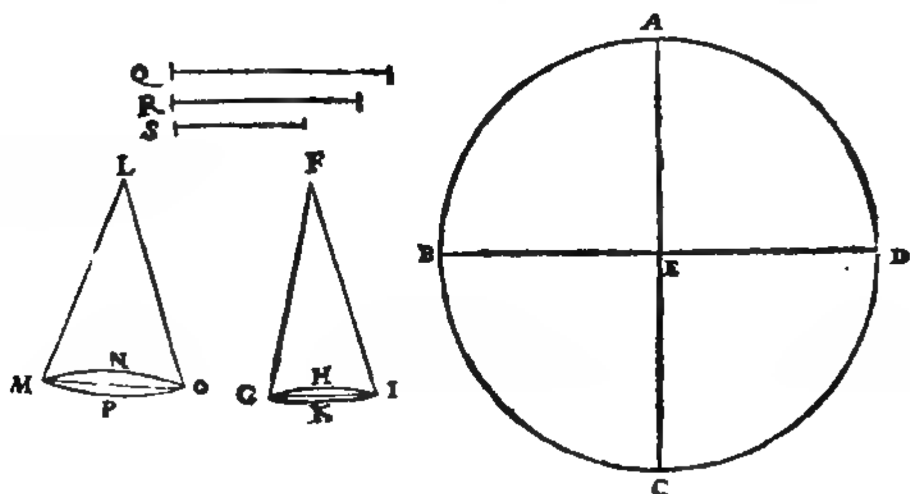
Conſtat etiam, omnis coni iſoſcelis ſuperficiem, excepta baſi, minorem eſſe dimidio ſuperficiei cylindri, qui & latus & baſim lateri & baſi coni æqualem habeat.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ. Πρόβλημα.

Κώνου δοθέντος, τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ ἴσην δύναμιν εὑρεῖν.

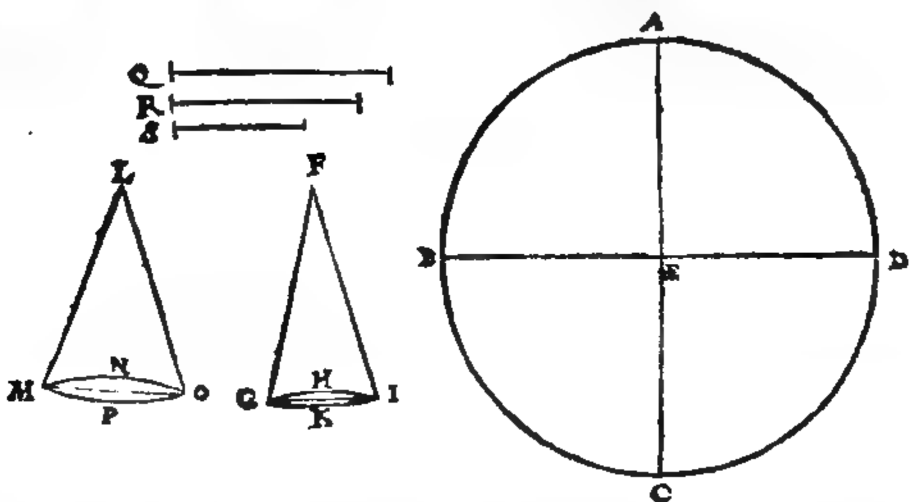
PROPOSITIO IX. Problema.

Cono dato, ipſius ſuperficiei æqualem potentiam inuenire.



Sit datus Conus LMO, *cuius baſis circulus* MNOPM. *Sit inuenienda æqualis potentia eius ſuperficiei. Interuallo* LM *deſcribatur circulus* ABCD, *cuius centrum* E: *diametri autem* AC, BD *ſeſe normaliter ſecanto. Erit igitur recta* EA *æqualis ipſi* LM, *ex constructione. Porro vertice* L *coni* LMO *manente immobili in* E, *baſis* MNOPM *circumacta deſcribet ſcalprum in peripheria* ABCD, *vt in ſuperioribus demonſtratum eſt. Eſto Coni* FGI *latus* FG *æquale lateri* LM, *hoc eſt rectæ* EA: *diametrus autem* GI, *circuli baſis conicæ* GHIKG *æqualis quartæ parti diametri* AC. *Per ea, quæ antè demonſtrata ſunt, erit conica ſuperficies* FGIKG *æqualis quartæ*

quartæ parti circuli ABCD: *hoc est quadranti* EADE: *cui æqualis sit recta* R, *per* III *huius. Rursus rectarum* GI, MO *media proportionalis sit recta* S. *Fiat vt* IG *ad* S, *ita* R *ad quartam, quæ sit*



Q. *Aio quartam magnitudinem* Q, *esse potentiam æqualem conicæ superficiei datæ* LMNOPM. *Nam per antecedentia, vt longitudo* GI *ad longitudinem* MO, *ita potentia* GI *ad potentiam* S, *per Coroll.* XX *sexti. Atqui vt potentia* GI *ad potentiam* S, *ita ex constructione potentia* R *ad potentiam* Q. *Ergo per* XI *quinti, vt longitudo* GI *ad longitudinem* MO, *ita potentia* R, *id est superficies conica* FGHIKG, *ad potentiam* Q. *Sed vt longitudo* GI *ad longitudinem* MO, *ita est superficies conica* FGHIKG *ad superficiem conicam* LMNOPM. *Ergo per eandem* XI *quinti, superficies conica* FGHIKG *eandem rationem habet ad superficiem* LMNOPM, *quam ad potentiam* Q. *Quare per* IX *eiusdem, superficies conica data* LMNOPM, *&* *potentia* Q, *sunt æquales. Quod erat faciendum.*

ALITER.

Fiat vt dimidia MO *ad* LO, *ita circulus* MNOPM *ad quartam. quæ quarta erit potentia superficiei* LMNOPM *per* XV *prioris de sphæra & cylindro Archimedis.*

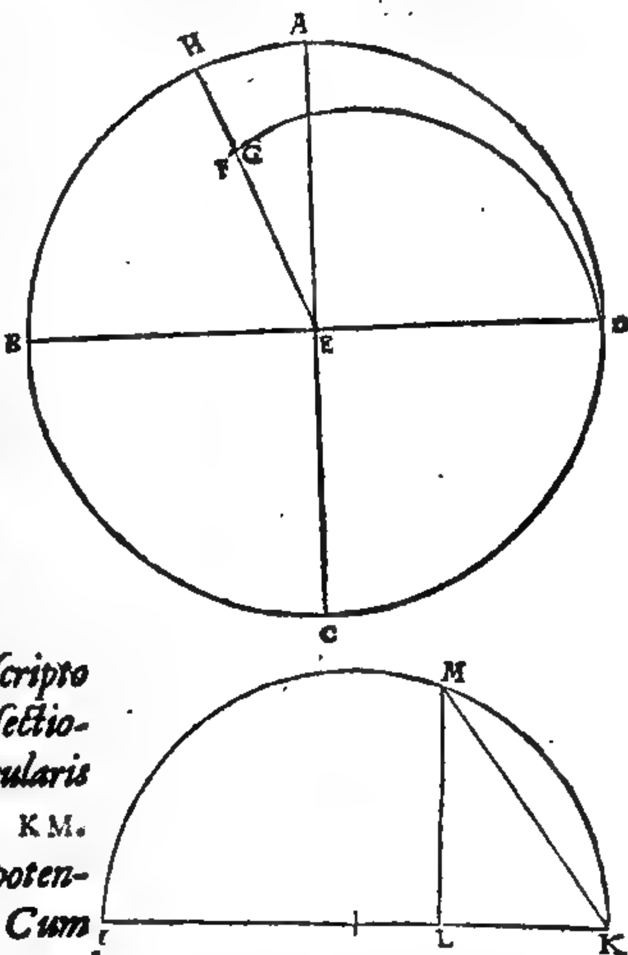
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι. Πρόβλημα.

Τὸν τομέα δοθέντα τετραγωνίζειν ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ.

PROPOSITIO X. Problema.

Scalpro dato æquale quadratum inuenire in dato circulo.



In circulo ABCD *sit inuenienda potẽtia Scalpri* HED *insistentis peripheria* HAD. *Diametris* AC, BD, *sese normaliter secantibus, describatur finis voluta ordinata* DGF. *Deinde inuentum sit* ἐμβαδὸν *circuli propositi* ABCD, *per* III *huius. sitque illud recta* IK: *qua per* X *sexti, in rationem* EH *ad* GH *in puncto* L *secta, & super eadem descripto semicirculo* IMK, *e signo sectionis* L, *erigatur perpendicularis* LM: *& connectatur recta* KM. *Aio connexam* KM *esse potentiam Scalpri dati* HED. *Cum enim sit vt* ED, *hoc est,* EH, *ad* GH, *ita, vt toties a nobis ex natura voluta ostensum est, tota peripheria* DCBHAD, *ad peripheriam* HAD: *sit autem vt peripheria* DCBHAD *ad peripheriam* HAD, *ita circulus datus ad scalprũ datum* H-D, *(quod qua pars est peripheria, eadem sit Scalprum sui circuli) erit pẽr* XI *quinti, vt* EH *ad* GH, *id est, vt* IK *ad* LK, *ita circulus, hoc est quadratum* IK, *ad Scalprum. Sed vt est* IK *ad* LK, *ita quadra-*

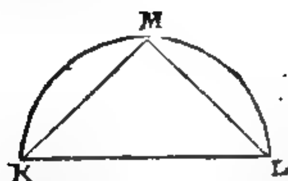
tum IK *ad quadratum* KM. *Ergo quadratum* IK *ad Scalprum, & ad quadratum* KM, *eandem habet rationem. Quare per posteriorem partem* IX *quinti, quadratum* KM, *& Scalprum* HED *sunt æqualia. Est igitur* KM *potentia Scalpri dati. Quod erat faciendum.*

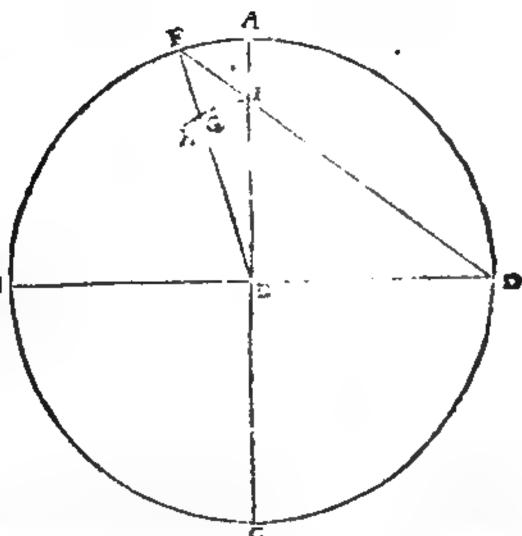
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ. Πρόβλημα.

Τμῆμα κύκλου δοθὲν τετραγωνίζειν.

PROPOSITIO XI. Problema.

Dato segmento circuli æquale quadratum reperire.





Ut in superiore propositione, ita in hac, si Polygona circulo inscripta fuerint isopleura, nullus est labor tam ibi Scalpra, quam hic segmenta quadrare. Hoc enim perinde est, ac partem imperatam de potentia data detrahere, hoc est de circulo, cuius ἐμβαδὸν *notum est, per* XVI *huius. Sin autem latera Polygonorum fuerint inæqualia, tunc in Scalpris quomodo agendum sit, superius ostensum est. Nunc in circulo* ABCD *datum sit inæquale segmentum* FADIF, *cui æquale quadratum sit inueniendum. Ab* F *limite segmenti dati iungatur recta* FE. *Diametris autem* AC, BD *sese normaliter secantibus, describatur apotome voluta ordinata* IGH *secans rectam* FE *in* G. *Scalpri vero* FED *quadratum sit recta* KL, *reperta per antecedentem. super qua semicirculo* KML, *descripto, per* I *quarti, accommodetur recta* LM *potentia scilicet trianguli* FDE. *Ac denique connectatur* KM. *Aio*

KM *esse*

KM esse potentiam segmenti FAD. Nam cum per XLVII primi Elementi, quadratum KL possit quadrata LM, KM; ablato quadrato ML, nempe potentia trianguli DEF, a quadrato KL, id est a potentia Scalpri FED: per communem sententiam, remanebunt KM, & segmentum FAD æqualia. Ergo KL est quadratum segmenti dati FAD. Quod erat faciendum.

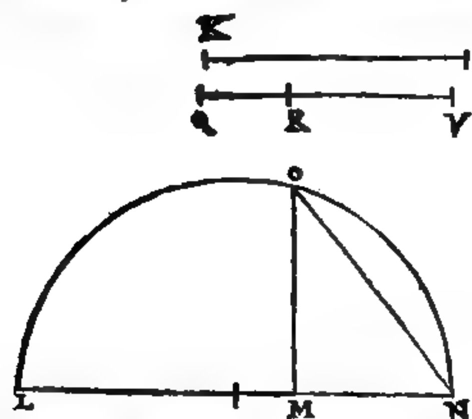
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ. Πρόβλημα.

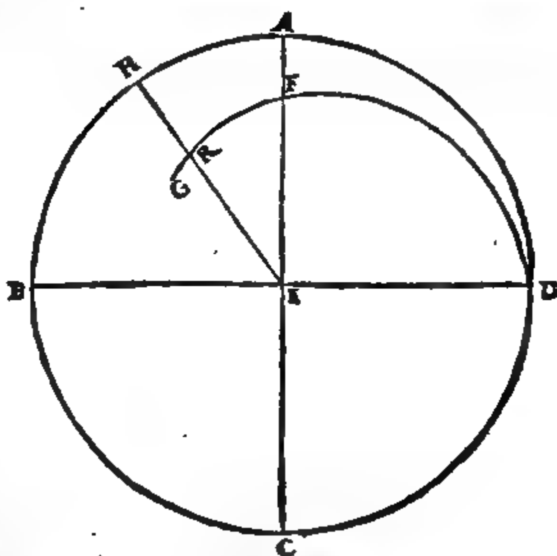
Τῇ δοθείσῃ δυνάμει ἴσον τμῆμα εὑρεῖν ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ.

PROPOSITIO XII. Problema.

Datæ potentiæ æquale Scalprum reperire in dato circulo.

Data potentiæ K sit inueniendum conueniens Scalprum in circulo ABCD. Inuenta per III huius potentia circuli, nempe LN, & descripto super ea semicirculo LON, accommodetur ei, per primam

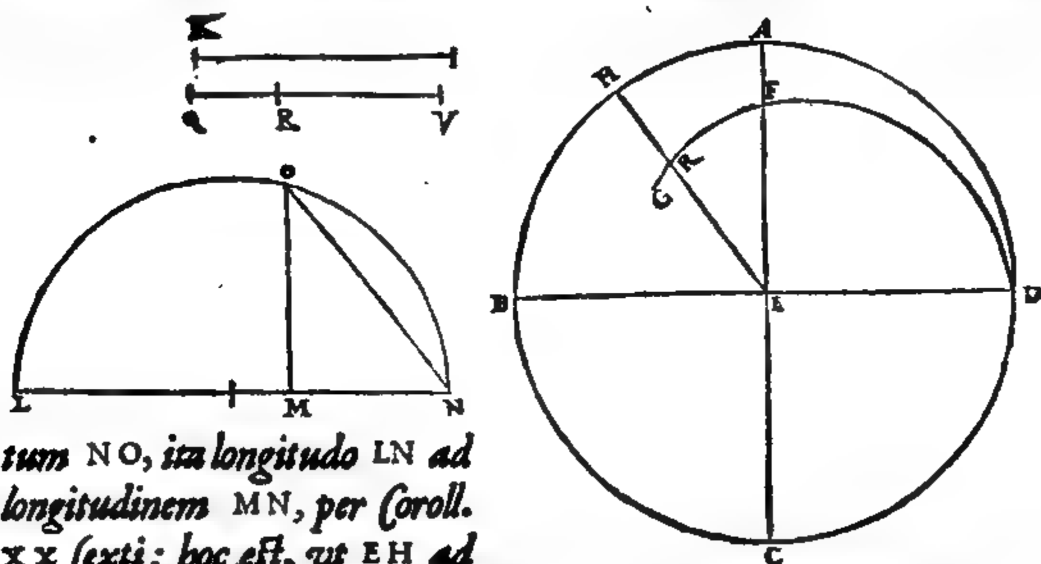




quarti, recta NO æqualis datæ K. A puncto autem O recta OM demittatur ipsi LN perpendicularis, per XII primi. In circulo ABCD, diametris sese normaliter secantibus AC, BD, describatur finis voluta ordinata DFG. Deinde recta QV semidiametro ED æqualis secetur in rationem LN, MN, in puncto R. Postremo centro E, interuallo ER, describendus circulus secet portionem volutæ in R. Connectatur recta ER,

 & pro-

& producta secet peripheriam HAD, *in puncto* H. *Aio Scalprum* HED *esse aequale potentiae datae* K, *hoc est potentiae* NO, *ex constructione. Nam cum sit ut quadratum* LN *ad quadra-*

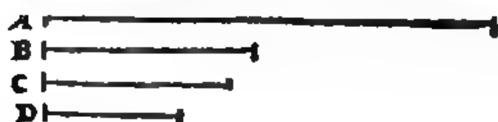


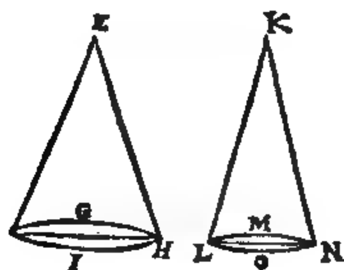
tum NO, *ita longitudo* LN *ad longitudinem* MN, *per Coroll.* XX *sexti: hoc est, ut* EH *ad* ER, *& proinde ut peripheria tota* DCBHAD *ad peripheriam* HAD: *& alternando, ut* RH *ad* EH, *ita peripheria* HAD *ad peripheriam* DCBHAD. *ut autem peripheria ad peripheriam, ita scalprum ad totum circulum: per* XI *quinti erit, ut quadratum* NO *ad quadratum* LN, *hoc est, ad circulum, sic scalprum ad eundem circulum. Ergo* NO *& Scalprum eandem rationem habent ad circulum. & proinde per posteriorem partem* IX *quinti,* NO, *hoc est* K, *& Scalprum sunt aequalia. Quod erat faciendum.*

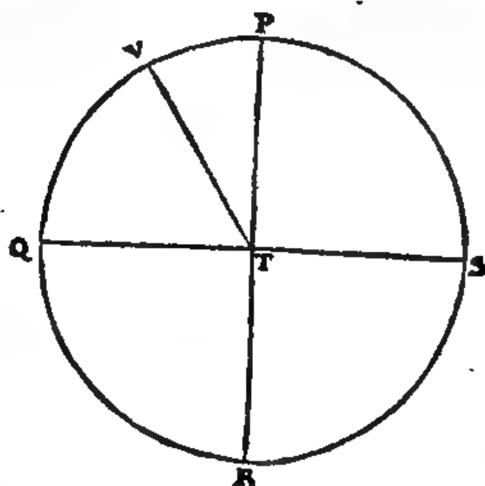
ALITER.

Data potentia B *sit inueniendum Scalprum aequale in dato circulo* PQRS. *Esto Conus* KLMNOL, *cuius superficies sit aequalis quadranti circuli* TPST: *& latus eius* KL *aequale semidiametro* TP, *per ea, quae antea demonstrata sunt. Esto* C *aequalis quadranti* TPST, *per* X *huius. Ergo erit aequalis conicae superficiei* KLMNOL, *ut antea demonstratum est in aliis. Fiat ut* C *ad* B, *ita* LN *ad aliam, nempe ad* D. *Postremo duabus* LN, D, *inueniatur tertia proportionalis* FH. *Erit, per Coroll.* XX *sexti, ut potentia* LN *ad poten-*

potentiam D, *ita longitudo* LN *ad longitudinem* FH. *Sed vt potentia* LN *ad potentiam* D, *ita erat ex constructione, potentia* C *ad potentiam* B. *Ergo per* XI *quinti, erit vt* LN *diametrus circuli*



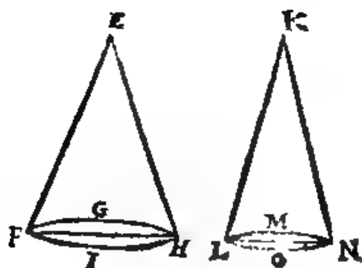


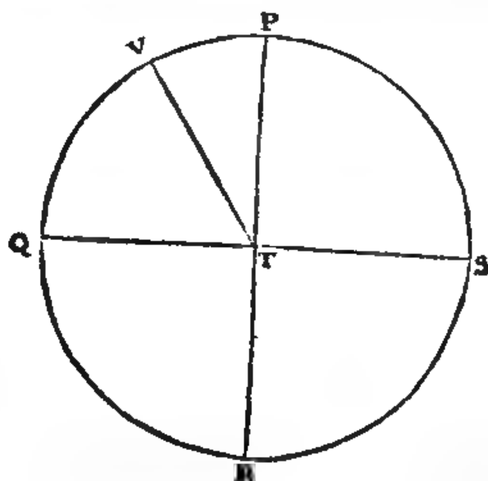


LMNOL, *qui est basis coni* KLN, *ad* FH *diametrum circuli alicuius, qui circulus sit basis alicuius coni, ita superficies* KLMNOL *ad superficiem eiusdem coni ignoti, per* VII *huius. Fiat igitur conus* EFH, *cuius latus* EF *sit æquale lateri* KL, *hoc est semidiametro* TP. *Vt igitur longitudo* LN *ad longitudinem* FH, *ita superficies* KLMNOL *ad superficiem* EFGHIF. *Et quia erat vt* LN *ad longitudinem* FH, *ita superficies conica* KLMNOL *ad* B: *Ergo per* IX *quinti, ipsa* B *& superficies conica* EFGHIF *sunt æquales. Esto* A *decuplum potentiæ* FH. *Per* VII *aut* IX *cycloperimetrici, erit* A *peripheriæ circuli* FGHIF *æqualis: cui æqualis sit peripheria* VPS *in circulo* PQRS, *per eandem* IX. *Connectatur recta* TV. *Aio Scalprum* TVPS *esse æquale potentiæ datæ* B. *Nam vt quadratum* LN *ad quadratum* FH, *ita quadratum perimetri* LMNOL *ad quadratum perimetri* FGHIF (*quod vtraque peripheria sit potentia decupla potentiæ diametri sui*) *id est, ita quadratum peripheriæ* PS *ad quadratum peripheriæ* VPS. (*quod* LMNOL *ipsi* PS, FGHIF *autem ipsi* VPS *sit æqualis*) *Erit ergo per* XXII *sexti, vt longitudo* LN *ad longitudinem* FH, *ita longitudo* PS, *ad longitudinem* VPS. *Sed vt longitudo* VPS *ad longitudinem* PS, *ita*

ſcalprum TVPS *ad ſcalprum* TPS (*quod ſcalpra totius circuli eadem partes ſunt, quæ peripheriæ ſcalprorum, totius perimetri, vt*







iam diximus) *Ergo vt longitudo* LN *ad longitudinem* FH, *ita ſcalprum* TPS *ad ſcalprum* TVPS. *Sed vt longitudo* LN *ad longitudinem* FH, *ita conica ſuperficies* KLMNOL, *hoc eſt quadrans, ſiue ſcalprum* TPS, *ad conicam ſuperficiem* EFGHIF, *hoc eſt, ad* B. *Ergo* B, *& Scalprum* TVPS, *eandem rationem habentes ad eandem magnitudinem, ſunt æquales, per* IX *quinti. Scalprum igitur* TVPS *in circulo* PQRS *repertum eſt æquale datæ potentiæ* B. *Quod erat faciendum.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.

At data recta A, dices rationem, quam habet ad peripheriam PQRS præter ea, quæ alibi demonſtrata ſunt, ſi ſuper decima quadrati A, nempe ſuper FH, conſtituatur conus habens latus HE æquale ſemidiametro TS. Erit enim vt diametrus FH ad diametrum PR, ita perimetrus FIHG, hoc eſt, data recta A, ad peripheriam PQRS, per II duodecimi.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ. Πρόβλημα.

Τὸν δοθέντα μηνίσκον τετραγωνίζειν.

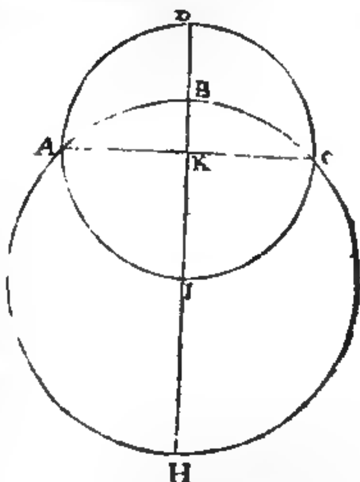
PROPOSITIO XIII. Problema.

Datæ lunulæ æquale quadratum reperire.

Circulus

Circulus DAIC, *cuius Diametrus* DI, *centrum* K, *circulum* ABCH, *cuius diametrus* BH, *centrum* I, *secet in punctis* AC, *faciens* μηνίσκον ADCB. *Iubemur ipsum* μηνίσκον *quadrare. Iuncta* AC, *per* X *huius, inueniatur potentia segmenti* ADC. *sitque ea recta* EF: *super qua descripto semicirculo* EGF, *accommodetur ei recta* FG *æqualis potentiæ segmenti* ABC *quæsitæ per eandem* X *huius. Iungatur recta* GE: *quam aio æqualem esse* μηνίσκῳ ADCB. *Nam segmentum* ADCA *excedit lunulam* ADCB, *segmento* ABCA. *Quadratum autem* EF *æquale segmento* ADCA *excedit quadratum* EG *quadrato* GF, *per* XLVII *primi. At quadratum* GF *est æquale quadrato segmenti* ABCA, *ex constructione. Ergo quadratum* GF, *vel ei æquale segmentum,* ABCA, *est excessus tam quadrati* GE, *quam Lunulæ* ADCBA *in æqualibus magnitudinibus* EF, *& segmento* ADCA. *Ac proinde quadratum* GE, *& quadratum Lunulæ eandem rationem habent ad eandem magnitudinem* GE. *Quare æqualia sunt, quadratum* GE, *& Lunula* ADCBA *per* IX *quinti. Quod erat faciendum.*





ΣΧΟΛΙΟΝ.

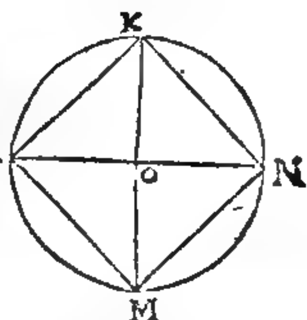
Idem potes facere in omni μηνίσκῳ dato, coniuncta prius hypotenusa. Tunc enim duo erunt segmenta inæqualia, quorum potentias per X huius venaberis. Tum minore de maiore deducta, reliquus erit μηνίσκος, siue, vt Plautus loquitur, Lunula. Nam in figura a nobis proposita segmentum ADCA est semicirculus circuli DAIC: cuius duplus est circulus ABCH. Itaque ABC erit segmentum quadrati circulo maiori ABCH inscripti, cuius quadrati latus est AC. Lunula vero ADCBA, est ea, quam quadrauit Hippocrates Chius, cuius lunulæ potentia est æqualis rectæ KI, aut KD, semidiametro scilicet circuli DAIC. Nam iunctis IA, IC, erit scalprum IABC quarta pars circuli BAHC, æquale semicirculo ADCA. Ablato communi ABCA, remanebit Lunula ADCBA æqualis triangulo AIC, cuius potentia est perpendicularis IK, per XIII sexti, adiuuante XXXI tertij. Itaque recta EG erit ei æqualis. Hoc inuento multum gloriabatur Hippocrates, & putauit illo epichiremate sese viam muniuisse ad quadrationem circuli. Sed neque alias lunulas quadrare potuit, neque illa lunula quicquam adiumenti ad τετραγωνισμὸν κύκλου adferre potuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ. Θεώρημα.

Η ἐπιφάνεια τοῦ ὀκταέδρου τοῦ εἰς σφαῖραν ἐγγραφέντος πρὸς τὸν μέγιστον τῆς αὐτὴν περιγραφούσης σφαίρας κύκλον ἐστὶν, ὥσπερ εἴκοσι πρὸς ἐννέα.

PROPOSITIO XIIII. Theorema.

Superficies Octaedri sphæræ inscripti ad maximum sphæræ circumscribentis circulum sese habet, vt viginti ad nouem.



In sphæra, cuius maximus circulus KLMN, *diametrus* KM, *centrum* O, *esto descriptum octaedrum, cuius latus* KN, *nempe quadrati circulo eidem inscripti. Si interuallo* KN *describatur circulus, erit diametri totius quadratum duplum quadrati* KM, *cum sit quadruplum quadrati* KN, *quod est dimidium quadrati* KM. *Ergo per primam* XII, *triangulum Hexagoni circulo* KLMN *inscripti duplum. Sed in Octaedro sunt octo triangula Hexagoni, & proinde quadraginta segmenta Hexagoni, per secundam huius. Quæ dupla sunt segmentorum totidem Hexagoni circulo* KLMN *inscripti. Erit igitur superficies Octaedri talium octaginta segmentorum, qualium triginta sex circulus* KLNM. *Quæ cum rationem habeant, quam viginti ad nouem, ideo superficies Octaedri sphæræ inscripti ad circulum maximum sphæræ circunscribentis, aut æqualem basi vnius ex duabus Pyramidibus quadrilateris, in quas Octaedrum resoluitur; eam habet rationem, quam viginti ad nouem. Quod erat demonstrandum.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ. Θεώρημα.

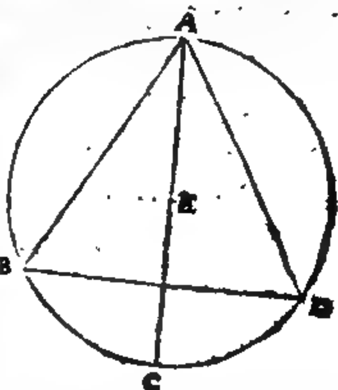
Η ἐπιφάνεια τοῦ τετραέδρου τοῦ εἰς σφαῖραν ἐγγραφέντος πρὸς τὸν μέγιστον τῆς περιγραφούσης αὐτὴν σφαίρας κύκλον ἐστὶν, ὥσπερ ἡ περιφέρεια

τμήματος

τμήματος τριγώνου ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφέντος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν αὐτήν.

PROPOSITIO XV. Theorema.

Superficies Tetraedri Sphæræ inſcripti ad maximum Sphæræ circunſcribentis circulum perinde eſt, vt peripheria ſegmenti trigoni iſopleuri eidem circulo inſcripti, ad rectam, quæ ipſam ſubtendit.



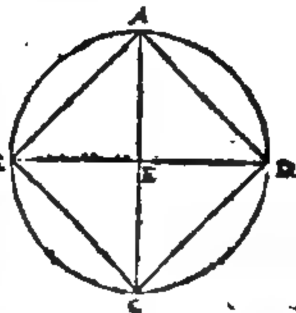
Sit circulus ABCD *maximus eorum, qui in ſphæra: ſitque in eo inſcriptum triangulum iſopleuron* ABD. *Aio Pyramidis ſphæra inſcriptæ ſuperficiem ad circulum* ABCD *rationem habere, quam habet peripheria* BCD *ad ſubtendentem* BD. *Sit diametrus* AC *expoſitarum partium* XII. *Erit quadratum 144 talium, qualium 108 latus* BD. *Rurſus qualium 144 quadratum* AC, *talium 1440 tota perimetrus* ABCD. *ideoque triens eiuſdem perimetri, nempe* BCD, *talium 160 erit. Porro latus Pyramidis talium eſt duum, qualium trium quadratum* AC, *per* XIII, *&* XVIII *tertiidecimi. Et propterea qualium 36 erit ſemidiametrus* EA, *talium 96 erit latus Tetraedri. quæ quidem habent rationem inter ſe, vt 3 ad 8. Sed in Pyramide ſunt quatuor trigona iſopleura, & proinde viginti ſegmenta hexagoni: in circulo autem* ABCD *ſunt triginta ſex: quorum ſingula ad ſingula Pyramidis rationem habent, quam 3 ad 8. Id eſt, circulus habet ter triginta ſex ſegmenta, qualia octies viginti ſunt in Tetraedro, per* XVIII *ſeptimi Elementi. Segmenta igitur circuli ad ſegmenta Pyramidis ſunt, vt 108 ad 160, hoc eſt, vt ſubtendens* BD *ad peripheriam* BCD. *Quod erat demonſtrandum.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ις. Θεώρημα.

Τὸ ἑνδεκατημόριον τοῦ κύκλου μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τετραγώνου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου.

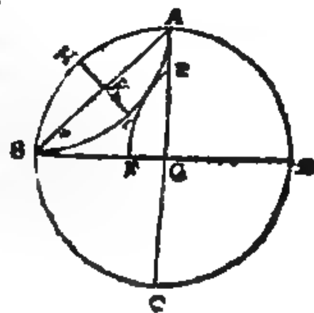
PROPOSITIO XVI. Theorema.

Vndecima pars circuli maior est segmento Quadrati ipso circulo inscribendi.



In circulo ABCD, *cuius diametri* AC. BD *sese normaliter secent, inscriptum esto Quadratum. Aio segmentum* ABA *esse minus vndecima parte ipsius circuli. Esto longitudo diametri* AB *expositarum partium* XVI. *Potentia igitur* ABCD *erit talium* 128, *qualium* 256 *quadratum à diametro* C. *Per Scholion* III *huius,* τὸ ἐμβαδὸν *circuli* ABCD, *maius e*[...] *ninus, quam* 200. *Deductis igitur* 128 *a minus quam*[...] *quam* 199, *relinquentur minus quam* 72, *potentia scil*[...]*gmentorum* AB, BC, CD, DA. *Itaque segmentum* AB *minus erit, quam* 18. *Sed vndecima pars circuli, nempe numeri maioris, quam* 199, *est maior, quam* 18. *Ergò* 18 *sunt minora, quam vndecima pars circuli. atque adeo vndecima pars circuli maior segmento quadrati ipsi circulo inscripti. Quod oportebat demonstrare.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.



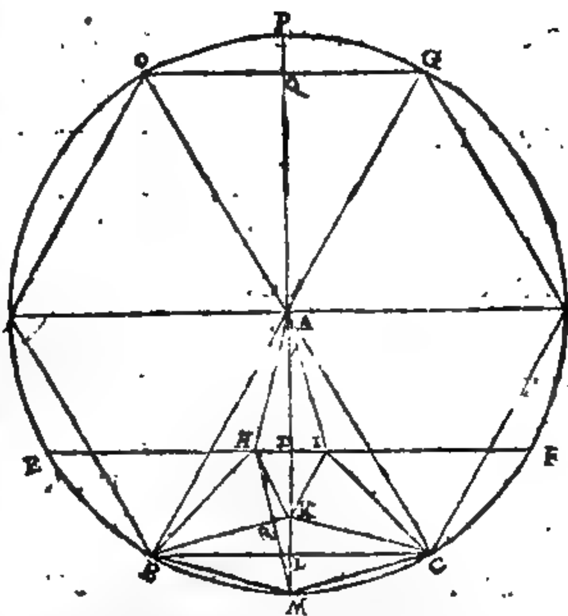
Quia segmenta vndecim quadrati circulo inscripti minora sunt ipso circulo, propterea semisegmenta viginti duo erunt eodem minora, per XV quinti: & proinde quadrans circuli erit maius quinque semisegmentis cum semisse, hoc est vndecim quartis vnius segmenti. Quare in quadrante AHBE circuli ADCB, in quo sunt descripta quinquè semisegmenta, AHK. AIK BHK. BIK, FGF. spatium subsiciuum AIBFE inter segmentum AIB & segmentum FGE. est maius quarta segmenti.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ. Θεώρημα.

Τὸ τοῦ ἑξαγώνου τρίγωνον διαιρεῖται εἰς ἓξ τρίγωνα ἰσοσκελῆ τῷ τοῦ ἑξαγώνου τμήματι ἐγγραφόμενα, καὶ ἔτι εἰς ἓν τρίγωνον ἰσόπλευρον τοῖς λοιποῖς ἀσύμμετρον.

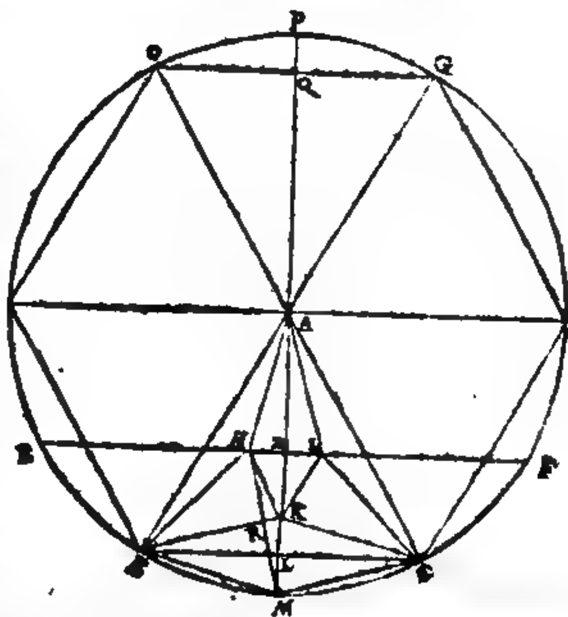
PROPOSITIO XVII. Theorema.

Triangulum Hexagoni diuiditur in sex triangula isoscelea, segmento Hexagoni inscribenda, & præterea in vnum triangulum isopleuron reliquis incommensurabile.



In circulo GEMF, *cuius diametrus* PM, *centrum* A, *descriptum esto Hexagonum, & triangulum isosceles in segmento* BMCB *trianguli* ABC. *Aio quodlibet triangulum Hexagoni, puta* ABC *(quod quidem est isopleuron per* XV *quarti) diuidi in triangula sex isoscelea æqualia triangulo isosceli* BMC, *in segmentum* BMCB *inscribendo, & præterea in triangulum isopleuron, quod sit reliquis sex incommensurabile. Diuisa peripheria* BC *bifariam in* M, *& abscissis peripheriis* MBE, MCF *æqualibus peripheriæ* BMC, *agatur recta* EF *per ipsas sectiones* E, F. *Est autem peripheria* BMC *segmentum Hexagoni. Ergo & peripheriæ* MBE, MCF *sunt segmenta Hexagoni. ac propterea recta* EF *diuidet semidiametrum* AM *bifariam in* D, *per* XII *tertiidecimi. Connectantur rectæ* MB, MC. *Ergo triangulum isosceles* BMC *diuiditur bifariam a recta* LM, *per* IIII *Cycloperimetrici: quæ est apotome, vt non semel ostendimus, per* LXXIIII *decimi: cui abscin-*

datur æqualis recta LK: *quæ cum sit commensurabilis apotomæ* LM, *& ipsa quoque erit apotome, per* CIIII *decimi. In triangulo* AGO, *recta* PQ *& ipsa est apotome, vtpote æqualis ipsi* LM. *Sed tam* AQ *ipsi* AP, *quam* AM *ipsi* AL, *potentia duntaxat est commensurabilis, vt alibi ostendimus. Ergo tota* QL *toti diametro* PM *potentia tantum est commensurabilis.* KP *autem est æqualis ipsi* QL. *Ergo* KP *est diametro commensurabilis potentia, & detracta ex diametro relinquit apotomen* KM, *per eandem* LXXIIII *decimi. Connectantur recta* KC, KB. *Erit igitur triangulum* KBC *triangulo* BMC *æquale. cui fiant similia & æqualia* AHB, AIC, *per* XXIII *primi. Ab æqualibus angulis* A, B, C *auferantur æquales* HAB, HBA, KBC, KCB, ICA, IAC. *Remanebunt anguli* HAI, HBK, ICK *æquales. Qui cum contineantur rectis æqualibus, per* IIII *primi, erunt bases* KH, HI, IK *æquales. & proinde triangulum* KHI, *isopleuron. Connectatur recta* HM. *Cum latera* DH, DA *trianguli* DHA *sint æqualia lateribus* DH, DM *trianguli* DHM, *& anguli contenti æquales, vtpote recti: basis ergo* HM *basi* HA *erit æqualis. Sed recta* HA, HB, BM *sunt æquales ex constructione. Ergo per primum pronunciatum, eadem eidem* HM *erunt æquales. ac propterea trigonum* HBM *itidem erit isopleuron. In triangulo isosceles* ABM, *anguli* ABM, AMB *sunt æquales, per* V *primi. item anguli* BKM, BMK *in triangulo isosceles* BKM. *Ergo angulus* BKM *angulo* ABM *est æqualis, per Scholion* XII *Cycloperimetrici. ac propterea triangula isoscelea* ABM, BKM, *vnum angulum communem habentia* BMA *sunt æquangula, per* XXXII *primi, adiuuante* V *primi. Ideo angulus* BAM *angulo* KBM *æqualis. Sed angulus* BAM *est dimidium anguli*



BAC

BAC, *hoc est anguli* HBM. *Ergo angulus* KBM *est dimidium anguli* BAC, *hoc est anguli* HBM, *per* VII *pronunciatum. Et proinde angulus* KBM *est dimidium anguli* HBM. *Propterea recta* KB *diuidens basim* HM *trianguli isopleuri* HBM *bifariam, in puncto* R, *est homologa recta* AM *diuidenti basim* BC *trianguli isopleuri* ABC *bifariam homologam basi* HM. *Triangulum aequilaterum* ABC *triangulo aequilatero* HBM *est analogum, per* I *definit* VI. *sunt enim similia. Et per* XV *quinti, triangulum* BKM *triangulo* ABL *erit analogum. Et ideo anguli* BRM, BRH *angulis* BLA, CLA *aequales, ergo & recti. & bases igitur* KM, KH *aequales, per* IIII *primi. Triangula ergo* BHK, BKM *sunt aequalia, per eandem* IIII *primi. Sed triangulum* BKM *est aequale triangulo* BKC, *aut* BMC, *aut* AHB, *aut* AIC. *Ergo triangulum* BHK *ipsis omnibus erit aequale. Neque aliter demonstrabitur de triangulis* ICK, AHI: *quod bases* HI, IK *basi* HK, *& latera quoque ex constructione habeant aequalia. Ergo triangulum Hexagoni* ABC *diuisum est in sex triangula triangulo* BMC *aequalia, nempe in* AHB, BKC, AIC, AHI, BHK, CIK: *& in vnicum isopleuron* HKI. *quod aio reliquis sex esse incommensurabile. Nam altitudo* DA *trianguli* HAI *est aequalis semidiametri dimidio* DM, *vt in principio ostensum est: &* HI *ostensa est aequalis ipsi* KM. *& propterea* IH, *vel* HK, *est apotome, & irrationalis, & ideo ipsi semidiametro ῥητῇ* AM *incommensurabilis, per* VII *definit. decimi Elementi. Ergo per* XV *quinti,* DA *ipsi* HK *est incommensurabilis. Rursus quia triangulum* IHK *est aequilaterum, qualium quatuor est quadratum lateris* HK, *talium trium est potentia perpendicularis* KD. *Commensurabilia igitur sunt* HK, DK, *saltem potentia. Nam quadratum rectae* HK, *plus potest, quam quadratum rectae* KD *congruentis, quadrato rectae* DH *longitudine ipsi* HK *commensurabilis. Quare per* III *definit. tertiae Hexados, recta* HK *est apotome, quae dicitur tertia: & ideo illi potentia commensurabilis recta* KD *est ἄλογος, per definit.* VII *decimi. Erit igitur ipsi* DA *incommensurabilis, per eandem definitionem. Quare cum triangula* ADI, KDI *sub eadem altitudine* DI *constituta, sint*

inter se, vt bases DA, DK, *quæ sunt ostensa incommensurabiles, erunt ipsa triangula incommensurabilia, per primam sexti. & per* XV *quinti totum triangulum* AIH *toti triangulo* IHK *incommensurabile. Quod erat demonstrandum.*

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν, ὅτι ὁ κύκλος δύναται τριάκοντα ἓξ τρίγωνα ἰσοσκελῆ τῷ τοῦ τμήματος ἑξαγώνου ἐγγραφόμενα, καὶ ἔτι τμήματα δωδεκαγώνου ἑβδομήκοντα δύο. Καὶ ὅτι τὸ τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ τῷ τμήματι ἑξαγώνου ἐγγραφόμενον σὺν τῷ ἰσοπλεύρῳ ἀσυμμέτρῳ δύναται δέκα τμήματα δωδεκαγώνου.

COROLLARIVM.

Patet, quod circulus possit triginta sex triangula isoscelea segmento hexagoni inscribenda, cum septuaginta duobus segmentis dodecagoni. Item quod triangulum isosceles segmento Hexagoni inscribendum simul cum vno isopleuro incommensurabili potest decem segmenta dodecagoni.

In circulo sunt segmenta Hexagoni XXXVI, *per* II *huius. at in segmento sunt singula triangula, & bina segmenta dodecagoni. Ergo in circulo sunt triginta sex triangula segmento Hexagoni inscribenda: & præterea* LXXII *segmenta Dodecagoni. Quod est prius.*

Rursus in circulo sunt triangula isoscelea segmento Hexagoni inscribenda XLII, *& sex præterea triangula isopleura, & duodecim segmenta dodecagoni. Ablatis duodecim segmentis, reliqua* XLII *triangula isoscelea, &* VI *isopleura, sunt æqualia* XXXVI *isoscelibus &* LX *segmentis dodecagoni. Et proinde vnum isosceles & vnum isopleuron sunt æqualia decem segmentis Dodecagoni. Quod etiam ita demonstrari potest. Triangulum Hexagoni potest quinque segmenta*

segmenta Hexagoni, per eandem II *buius. Poterit igitur quinque isosceles cum isopleuro. Ergo vnum isosceles, & vnum isopleuron sunt æqualia decem segmentis dodecagoni. Quod erat posterius.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Quod triangulum H B M sit æquilaterum, poterat etiam alia via demonstrari. Nam trianguli æquilateri A B C angulus A est duum trientum vnius recti. Ergo angulus B A M trianguli isoscelis M B A est vnius trientis. Reliqui igitur ad basim A B M, A M B simul sunt æquales quinque trientibus, per X X X I I primi. Itaque alteruter eorum habet rationem duplam sesqualteram ad reliquum ad verticem A. Ergo triangulum M B A est triangulum Hexagoni ad peripheriam. Est autem recta H A rectæ H B æqualis, id est ipsi B M, ex constructione. Quare centro H, interuallo H A, aut H B, descripto circulo, erit B M latus Hexagoni eodem circulo inscripti. vt propterea triangulum H B M sit triangulum Hexagoni ad centrum, & proinde æquilaterum, per X V. quarti, adiuuante etiam X X. tertij. Quod erat demonstrandum.

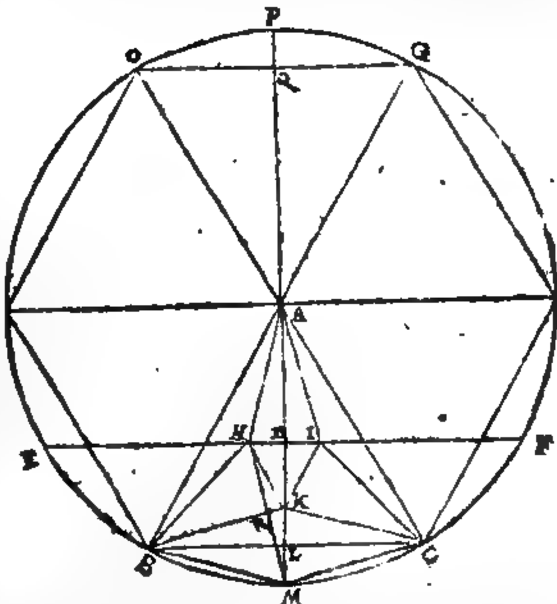


Figura A H B K C I A, quæ componitur ex tribus isoscelibus, & æquilatero incommensurabili, est æqualis duobus æquilateris H B M. Nam circulus est æqualis X L I I isoscelibus, V I æquilateris, X I I segmentis Dodecagoni. Rursus idem est æqualis XXIIII isoscelibus, (Nam iuncta I M, erit triangulum A M I æquale triangulo A H I. Ita in Scalpro A B C erunt I I I I isoscelea, duo B H M) X I I B H M, X I I segmentis Dodecagoni. Ablatis vtrinq; duodecim segmentis dodecagoni, & viginti quatuor isoscelibus, remanent X I I H B M æqualia X V I I I isoscelibus, & sex æquilateris H K I Ergo III isoscelea cum vno H K I sunt æqualia duobus B H M.

Quibus positis, rursus patet Dodecagoni isosceles A B M ad centrum, esse æquale duobus B H M, & vni H K M. Nam tria isoscelea cum vno æquilatero H K I valent duobus æquilateris H B M vt iam diximus. Ergo figura A B H K I C A constans ex tribus isoscelibus, & æquilatero est æqualis duobus æquilateris H B M. Quod & iam ostensum est. Quare dimidia figura A B H K A valebit vno æquilatero H B M: & consequenter isosceles Dodecagoni ad centrum A B M est æquale duobus H B M, & vni isosceli H K M.

Si igitur interuallo H B, describantur duo circuli æquales, triangulum Hexagoni vnius, nempe triangulum H B M. & duo triangula dodecagoni alterius B H K, B K M, sunt æqualia triangulo A B M dodecagoni circulo G P B O M inscripti. & proinde totum dodecagonum circulo G P O B M inscriptum erit æquale Hexagono vnius, & dodecagono alterius simul sumptis.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ. Θεώρημα.

Τὰ Ἐλλειψοειδῶν χωρία ἐνδέχεται τῶν μὲν κύκλων εἶναι μείζω τῶν τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα τοῖς ὑπὸ τῶν ἀμφοτέρων διαμέτρων τῶν Ἐλλειψοειδῶν περιεχομένοις ὀρθογωνίοις ἴσα ἐχόντων, τὰς δὲ περιμέτρους μείζους ἔχειν τῶν περιμέτρων τῶν κύκλων τῶν τὰ ἀπ' ἀρχῆς χωρία ἐλλειψοειδῆ δυναμένων.

PROPOSITIO XVIII. Theorema.

Poteſt fieri, vt Ellipſioideon ſpatia ſint maiora eis circulis, a quorum diametris quadrata æqualia ſunt rectangulis ſub vtraque Ellipſioideon diametro contentis, perimetri autem eorum ſint maiores perimetris eorum circulorum, qui poſſint ellipſioidea, quæ a principio.

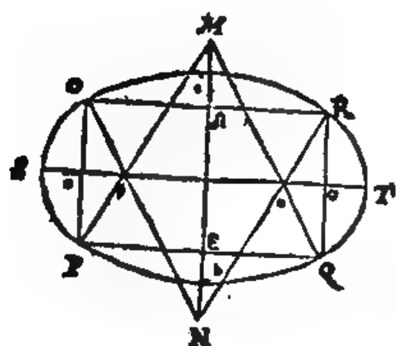
In circulo AEF, *cuius diametrus* AF, *centrum* B, *inſcriptum ſit triangulum Hexagoni* BEF *Circuli vero* ACBD *diametrus* AB *ſit dimidia diametri* AF: *cuius centrum* B. *cui accommodatum ſit latus trigoni iſopleuri* CD. *Rurſus Ellipſioidis* chki *rectangulum inſcriptum* df *habeat latus maius* dg *æquale diametro* AB: *minus autem latus* de *æquale rectæ* CD. *Ergo ex definit.* IIII, *ſegmentum* deg *eſt æquale ſegmento* EIF: *& recta* mc *recta* fr: *& ſegmentum* dhe *eſt æquale ſegmento* CBD: *& recta* ph, *recte* IB: *&* ph, qi *ſimul ſunt æquales toti* IB: *ac proinde tota* hi *toti* IF *æqualis. Iungantur rectæ* me, mf, *item* ld, lg. *Recta* ml *rectæ* de, *hoc eſt rectæ* CD *eſt æqualis. Qualium quatuor eſt quadratum a recta* BA *hoc eſt* BE, *aut* BF, *talium trium eſt quadratum rectæ* CD. *Sed qualium quatuor eſt quadratum rectæ* BE, *aut* BF, *talium trium eſt quadratum rectæ* Bſ, *eo quod* BE *ſit latus trianguli iſopleuri* BEF *homologum lateri* CD. *Ergo per* VII *Axioma* CD, Bſ *ſunt æquales. & per primum Axioma*, Bſ, ml *ſunt æquales. Quadratum autem* ld *eſt æquale quadratis* md, ml, *hoc*

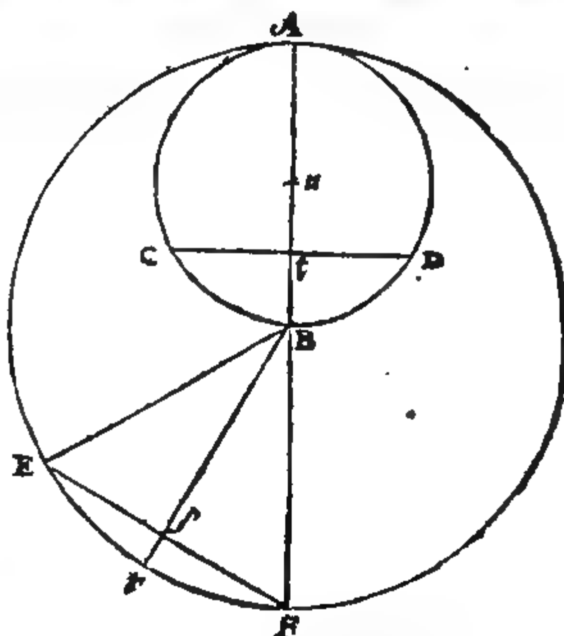
hoc est quadratis ſE, ſB. *Sed quadratis* ſE, ſB *est æquale quadratum* EB. *Ergo* EB, *(hoc est* dg,*)* dl *sunt æquales: & triangulum* dlg *triangulo* BEF *æquale*. *Rursus circuli* GHIK *diametrus* GI *sit talium* XVI, *qualium* XII *longitudo diametri* AB. *In quo circulo lateris isopleuri eidem inscripti* HK *dimidium* LH *sit sectum quadrifariam in signis* X, Y, Z. *In Ellipsoide* aSbT *sit maior diametrus* ST *æqualis rectæ* HK: *maius autem latus orthogonij inscripti* OR *sit æquale rectæ* CD, *minus autem* OP *sit æquale rectæ* UB, *semidiametro circuli* ACBD. *Quæ ratio est quadrati* BA *ad quadratum* IG, *eadem est lateris polygoni* CD *ad latus polygoni* HK, *per primam* XII. *per* XXII *autem sexti, ut longitudo* BA *ad longitudinem* IG, *ita longitudo* CD *ad longitudinem* HK. *Quemadmodum autem qualium* BA *erit sex, talium octo est longitudo* IG: *ita qualium sex erit* CD, *talium octo erit* HK. *Ablatis duabus octauis* HX, XY, *reli-*

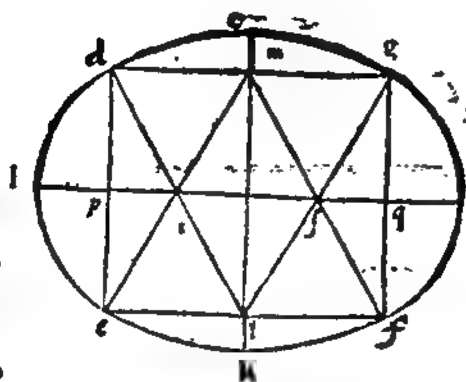
xy, *reliqua* YK *erit aequalis rectae* CD: *& propterea recta* ns, *vel* OT, *rectae* XH, *vel* xy *est aequalis. Segmentum igitur* OSP *est segmentum trigoni isopleuri circulo inscripti, cuius circuli diametrus est aequalis rectae* HL, *dimidiae scilicet ipsius* HK, *aut* ST. *Sunto triangula* MPQ, ONR *super basibus* OR, PQ *aequilatera. In quibus amborum differentia esto* aM, bN, *ut* mc, lk *in triangulis* mef, kdg. (*quia tam haec, quam illa sunt aequangula & inuicem & omnibus, & similia, similiterque sita.*) *Ablatis differentiis, remanebunt* ab, ml *homologae. Sed* ml *est perpendicularis vtriusque trianguli isopleuri. Ergo* ab *est perpendicularis vtriusque trianguli* NOR, MPQ. *ideo* aM, bN *homologae apotomis* mc, lk, *erunt & ipsae apotomae aequales ipsis* aδ, εb. *Quare* ab *ipsi* Mε, *vel ipsi* Nδ *est aequalis, ac proinde vtriusque trianguli κάθετος. Quia igitur quadratum* CD, *hoc est* MP, *aut* MQ, *est talium quatuor, qualium trium quadratum* Mε, *hoc est* ab: *qualium autem quatuor est quadratum eiusdem* CD, *talium trium est quadratum* εA; *in circulo* ACBD: *erunt* εA, ab *aequales, per* IX *quinti. Et propterea qualium* XII *ex hypothesi, est longitudo* BA, *talium* IX *est longitudo* εA, *vel* ab. *Iam qualium* 144 *est quadratum* ld, *siue* lc, *talium* 108 *est quadratum* lm. *Cuius latus est* 10 $\frac{8}{21}$ *fere. Atque adeo ambae longitudines* mc, lk *simul compositae sunt* 3 $\frac{5}{21}$ *prope, nempe qualium* XII *est longitudo* ld, *aut* lc. *Est autem* lm *aequalis ipsi* YK, *vt iam demonstratum est: & qualium* 108 *est potentia* lm, *vel* YK, *talium* 192 *est potentia* HK. *Dimidiae ergo longitudinis potentia* LH *talium erit* 48, *& talium* 12 *potentia quartae partis* YH *vel* YL. *Cuius quartae partis latus est* 3 $\frac{1}{7}$ *fere: hoc est*, 3 $\frac{3}{21}$. *Maior igitur est longitudo* yh, *quam ea, quae composita ex* mc, lk. *Maior ergo tota* HK, *quam tota* ck. *Porro longitudo* mc *est ἄλογος, vtpote ἀποτομή, per* LXXIIII *decimi, ac proinde longitudini* mk *incommensurabilis, per* IIII *definitionem decimi. atque adeo* mk *tam ipsi* mc, *quam toti* ck *longitudine & potentia erit incommensurabilis, per* XVII *eiusdem. Sed* HK, mk *sunt potentia commensurabiles. Ergo* HK *toti* ck

incom-

incommensurabilis, per XVII *eiusdem. Sed* HK, mk *sunt potentia commensurabiles. Ergo* HK *toti* ck *incommensurabilis per* XIIII *eiusdem. Qualium igitur fere* $13\frac{23}{27}$ *est longitudo* HK, *talium* $13\frac{13}{21}$ *fere est longitudo* ck. *His ita & constructis & demonstratis, ostendendum est, spatium quidem contentum Ellipsioide esse maius circulo, cuius a diametro quadratum est aequale rectangulo sub am-*







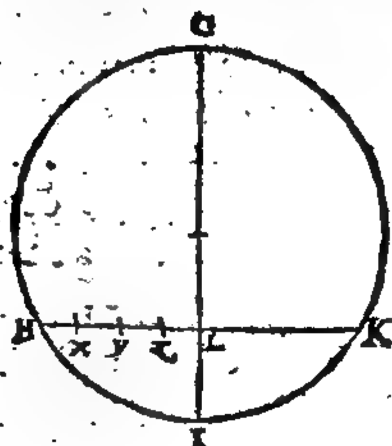
babus diametris Ellipsioidis cōtento: circuli vero, qui poterit spatium Ellipsioidis, perimetrū esse minorem perimetro Ellipsioidis. Segmenta dhe, dcg, *hoc est segmenta* CBD, EIF *sunt commensurabilia: quod nimirum circuli* ACBD, AEF *sunt commensurabiles, vtpote cum a diametris quadrata sint commensurabilia ex constructione. Circulus verò* AEF *circuli* ACBD *est quadruplus. Ergo segmentum* EIF *segmenti similis, similiterque positi in circulo* ACBD *erit quadruplum, per* XV *quinti. Segmentum autem* CBD, *hoc est* dhe,

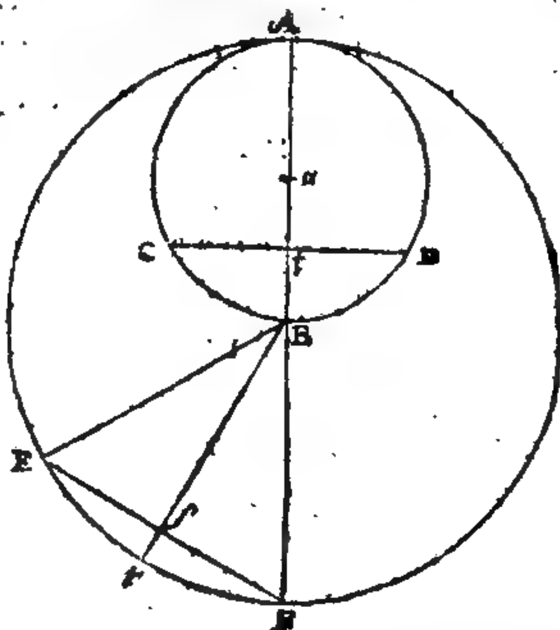
 potest

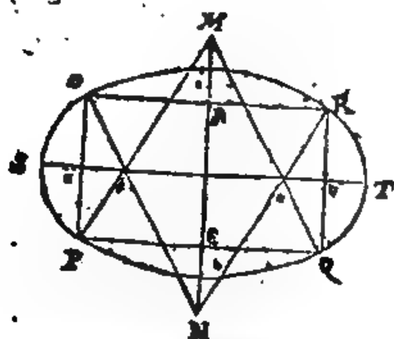
potest septem segmenta similia segmento EKF, *vel* dcg. *Ergo segmentum* dcg *potest talia quatuor segmenta, qualia septem potest* dhe: *ita vt quatuor segmenta simul* dcg, ekf, dhe, gif, *possint* XXII *segmenta hexagoni circulo* ACBD *inscripti. Iam lateris* CD *quadratum ad quadratum lateris* EF *rationem habere demonstratum est, quam tria ad quatuor. & propterea triangulum æquilaterum super basi* CD *constitutum ad triangulum* BEF, *id est* mef, *rationem habet, quam tria ad quatuor. Ideo hexagonum (quod semper est æquale duobus Trigonis isopleuris) circulo* ACBD *inscriptum, ad duo talia triangula, quale triangulum* mef, *id est ad totum rectangulum* df, *rationem habet, quam tria ad quatuor: vel quam 30 ad 40. Sed hexagonum circulo* ACBD *inscriptum est talium 30 segmentorum, qualium 22 sunt segmenta* dcg, ekf, dhe, gif. *Ergo totum rectangulum* df *talium 40 segmentorum erit. atque adeo totum spatium* chki *erit 62 segmentorum, qualium 36 est circulus* ACBD: *aut qualium 144 est circulus* AEF. *Commensurabile igitur erit spatium* chki *alterutri circulo* ACBD, AEF. *Quare per primam* XII, *oportet diametrum circuli, qui circulus poterit talia 62 segmenta, diametris* AB, AF *esse commensurabilem, saltem potentia. Porro ratio quadrati a diametro* AB *ad rationem quadrati a diametro* GI, *hoc est ratio 144 ad 256, est vt 36 ad 64. Sed in circulo* ACBD *sunt 36 segmenta hexagoni, qualia sunt 62 in spatio* chki. *Ergo in circulo* GHIK *talia sunt 64. Quod si 64 segmentis competunt 256 a diametro, ergo 62 segmentis competent 248 a diametro circuli, qui circulus poterit 62 segmenta, id est spatium* chki. *Spatium vero 248 ῥητὸν comprehenditur sub duabus longitudine commensurabilibus 18, 13 $\frac{7}{9}$. Atqui rectangulum sub* ck, hi, *id est, sub longitudinibus 18, 13 $\frac{11}{12}$ minus est, quam 246, vtique medium & irrationale, vtpote sub duabus potentia tantum commensurabilibus, & minoribus quam 18, 13 $\frac{7}{9}$ contentum. Ergo & quadratum à diametro circuli, qui poterit spatium* chki, *est minus rectangulo sub* ck, hi *concepto. Quod & experiundum & demonstrandum in Ellipsoide minore*

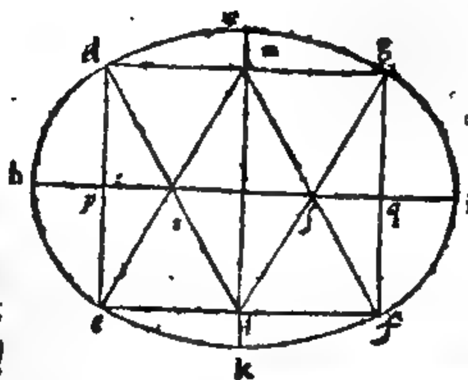
OSPQTR.

OSPQTR. *Circuli, cuius segmentum isopleuri in eo inscripti est æquale segmento* OSP, *diametrus est æqualis rectæ* LH, *vt iam demonstratum est. Circuli autem semidiametrus, cui circulo inscripti hexagoni segmentum est* RAO, *est æqualis rectæ* OR, *id est rectæ* YK. *Sed quadratum duplæ* YK *ad quadratum* HY *est, vt* 432 *ad*









48, *hoc est nonuplum. Talium igitur* 9 *est segmentum* OAR, *qualium* OSP *est* 7. *Ergo quatuor segmenta* OAR, PbQ, OSP, RTQ *simul sunt æqualia* 32 *segmentis, qualia* 36 *sunt in circulo, cuius circuli diametrus est æqualis rectæ* HL. *Iam vero rectangulum* OQ *ad hexagonum circulo* ABD *inscriptum est, vt duo ad tria, cum hexagonum circulo* ACBD *inscriptum sit æquale rectangulo sub* CD, tA, *siue sub* OR, tA. *Ergo per primam sexti, hexagonum circulo* ACBD *inscriptum, est ad rectangulum* OQ, *vt* tA, OP, *hoc est, vt* 9 & 6,

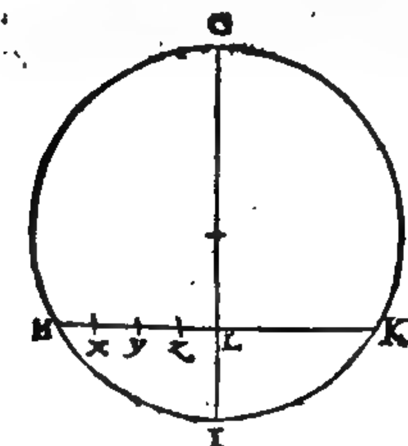
 vel 3,

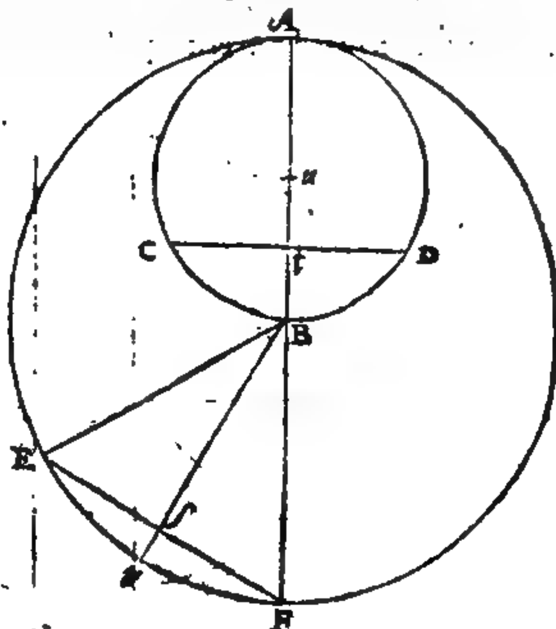
vel 3, & 2. Qualium igitur segmentorum 30 est Hexagonum circulo ACBD inscriptum, talium 20, est rectangulum OQ. Sed Hexagonum, vel Hexagoni pars segmentum, est homologum quadrato à diametro circuli sui. hoc est, erit ut quadratum diametri AB, ad quadratum HL, ita segmentum Hexagoni circulo ACBD ad segmentum hexagoni Circulo HL inscripti: & ἐναλλάξ, per primam XII. Erit igitur ut 144 ad 48, ac propterea triplum. Ergo 20 segmenta rectanguli OQ sunt æqualia 60 segmentis hexagoni circulo HL inscripti. & proinde unum ex 60 talibus segmentis est æquale uni ex 7 segmentis Hexagoni in segmento OSP, aut 9 in segmento OAR contentis. Ergo totum spatium asbT est æquale 92 segmentis hexagoni, qualibus 36 est æqualis circulus, cuius diametrus est LH. Iam ratio 36 ad 92 est ut 9 ad 23. Quòd si a 9 est quadratum diametri 48, ergo a 23 erit quadratum diametri 122 $\frac{2}{3}$, utique ῥητὸν, utpote quadratum diametri eius circuli, qui circulus poterit 92 segmenta, nempe circuli, qui poterit spatium asbT. Sed longitudo ST est 13 $\frac{11}{17}$ fere, qualium nouem est longitudo ab. Rectangulum ergo sub 13 $\frac{11}{17}$ fere longitudine ST, & 19 præcise longitudine ab (quæ ambo sunt tantum potentia commensurabiles) erit medium καὶ ἄλογον per XXII decimi, & maius quam 224. Erit ergo maius quadrato diametri eius circuli, qui poterit spatium asbT: ut in maiore Ellipsioide. Quod est prius.

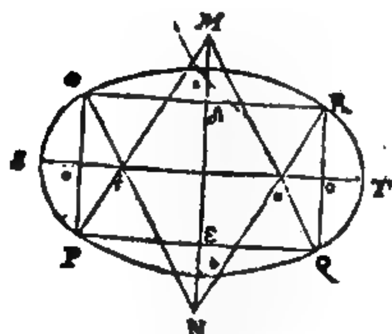
Ostendamus circuli, qui poterit spatium Ellipsioidis, perimetrum minorem fore perimetro Ellipsioidis, puta perimetro cdhekfi maioris Ellipsioidis. Diametrus AB est talium trium, qualium quatuor est GI, & qualium 6 est AF, tam ex hypothesi, quam ex constructione. Ergo quadrata ab eorum tam diametris, quam perimetris sunt inter sese, ut 9, 16, 36. & quidem CD est nona pars quadrati a perimetro ACBD, & EF trigesimasexta quadrati a perimetro AEF. Ergo æquales sunt peripheriæ CBD, EIF utique alterutra æqualis uni sextadecimæ quadrati a peripheria GHIK hoc est quadranti peripheriæ GHIK. Ergo tota perimetrus cdhekfi, est æqualis perimetro GHIK: cuius diametrus GI ostensa est maior

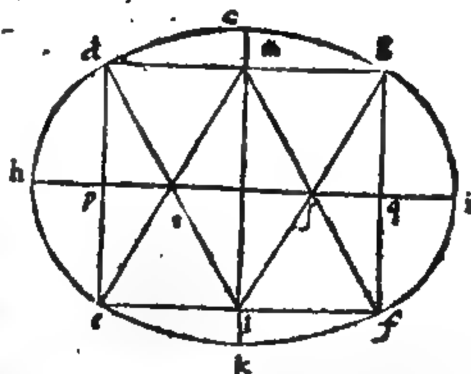
diametro

diametro circuli eius, qui poterit ſpatium chki. *Idem & oſtendemus in minori Ellipſioide. Diametrus circuli, cuius Hexagoni ſegmentum eſt* OAR, *poteſt* 432, *vt dictum eſt. Ergo perimetrus*





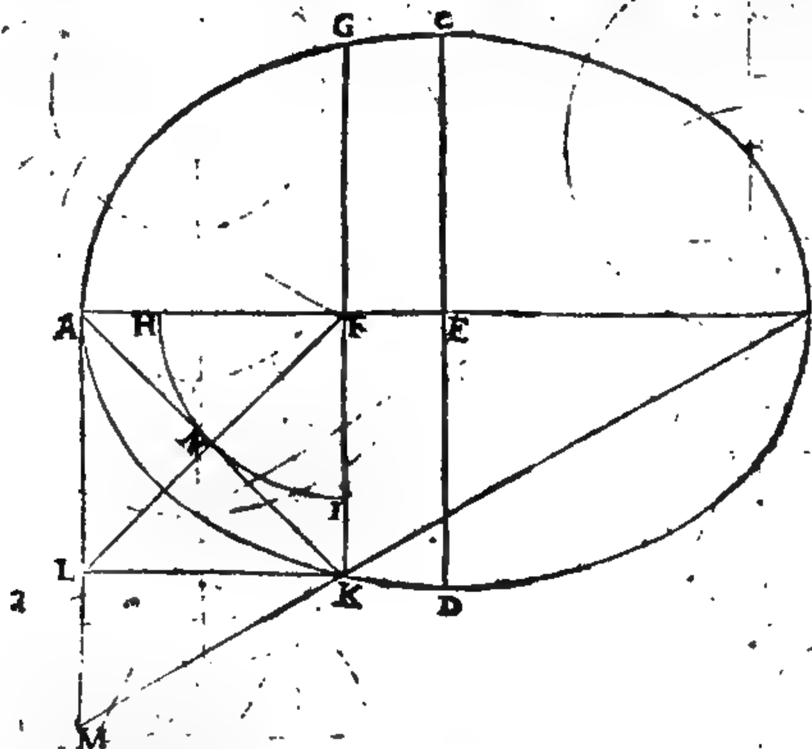




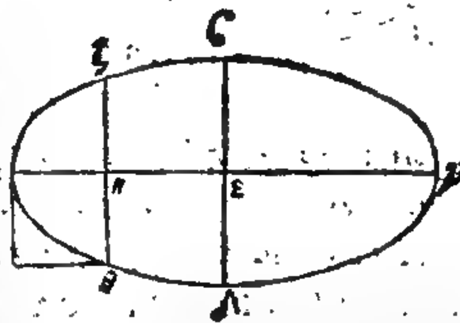
erit 4320. *triceſima ſexta pars* 120 *potentia peripheria* OAR. *Cuius latus fere* 11. *At diametrus alterius ſegmenti* OSP, 48. *perimetrus* 480. *nona pars* 53 $\frac{1}{3}$, *qua maior eſt, quam vt eius latus ſit* 7. *Ergo peripheria* OSP, *maior, quam* 7. *& tota* RAOSP *maior, quam* 18. *Proinde tota* RAOSPBQT *eſt pluſquam longitudinis* 36. *Ergo quadratum peripheria* RAOSPBQT *eſt pluſquam* 1296: *& proinde maius, quam* 1227. *Quod erat poſterius.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Sit Ellipsoides A C B D, cuius maior diametrus A B, minor C D. Fiat vt A B ad C D, ita C D ad A M, quæ in puncto A coniuncta sit ipsi A B perpendicularis. Iungantur rectæ M B, & K L ipsi A F, & K F ipsi M A parallela, quæ quidem producta in ambitum Ellipsoidis secabit eum in puncto G. Itaque recta G K erit quidem vna perpetua linea, F K autem ipsi F G erit æqualis, propterea quod diametrus A B scindit Ellipsoides totum bifariam.



In parallelogrammo A F K L diametri A K, F L secent sese in puncto N. Centro N, interuallo F N, describatur peripheria I N H. Angulus K N I, quam Græci vocant κερατοειδῆ γωνίαν, est minor omni angulo rectilineo. Igitur recta K A tangit peripheriam circuli I N H, in puncto N, per X V I tertij. Quare per Coroll. eiusdem, recta K A est ad angulos rectos ipsi F N. Et per definitionem X primi, adiuuante X I I I eiusdem, omnes anguli ad N sunt recti.



Cum igitur quadrilaterum A K sit parallelogrammum, diametri A K, L F diuidunt sese bifariam in centro N. Itaque cum latera N A, N F trianguli N A F, sint æqualia lateribus N F, N K trianguli N F K, & anguli æqualibus lateribus contenti æquales, basis igitur F A basi F K erit æqualis: & propterea rectangulum A K est quadratum. Sed quadratum F G est æquale quadrato A K. Igitur recta F G ordinatim ad diametrum applicata est æqualis orthogonio A K. Id autem cum accidat omni κωνικῇ τομῇ, accidat etiam τῇ κυλινδρικῇ: propterea Serenus Antissensis in propositionibus XVI, XVII prioris libri

sui

sui concludit τὴν κυλινδρικὴν τομὴν esse ἔλλειψιν. Ergo Ellipsioides ACBD erit vera Ellipsis, siquidem illi idem accidit, quod Ellipsi: vt & Ellipsioides αβγδ, in quo rectæ ηζ ordinatim applicatæ quadratum est æquale orthogonio αθ, quod & ipsum demonstrare possumus esse quadratum. Si igitur necessario sequitur, secundum Serenum, Ellipsioides esse veram Ellipsim, quia illi eadem accidunt, quæ & Ellipsi: ergo per antecedentem, non minus peccatum est ab Archimede in potentia Ellipseos, quam in circulo. Demonstratum enim est a nobis, potentiam omnis Ellipsioidis esse paullo maiorem potentia circuli, cuius circuli diametrus sit æqualis potentiæ rectanguli sub vtraque Ellipseos diametro, contra quam ipse olim persuadere conatur τῇ εἰς τὸ ἀδυνάτον ἀπαγωγῇ vsus. Non dubium enim est, quin minute Ellipsim secuerit, vt & circulum secuerat, post Antiphontem.

Porro esto ἄπορον: Circa duas inæquales diametros datas ἔλλειψιν, vel ἐλλειψοειδὲς describere, siquidem idem sunt: aut vtrunque, si diuersa.

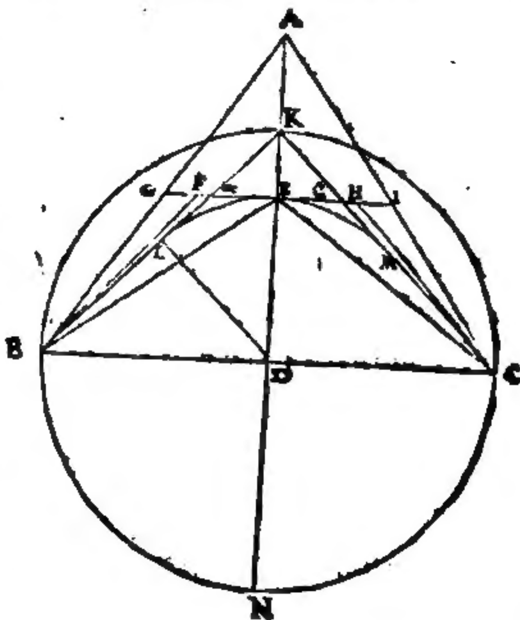
In maiore Ellipsioide ACBD facta est a nobis vt BA ad CD, ita CD ad AM: quod hæc sit constructio eorum, qui hæc conica tractant, Apollonij, Sereni, & Pappi, vt demonstretur rectam ordinatim applicatam esse æqualem orthogonio: non autem hoc fecimus, quod nostræ demonstrationi inseruiret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ. Πρόβλημα.

Παραβολὴν ἀποδεῖξαι ἔχουσαν λόγον ἐπιτρίτου ἐλάσσω πρὸς τρίγωνον τὸ ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν τῇ παραβολῇ καὶ ὕψος ἴσον.

PROPOSITIO XIX. Problema.

Parabolen ostendere, quæ ad Triangulum in eadem basi eademque altitudine cum Parabole constitutum rationem habeat sesquitertia minorem.



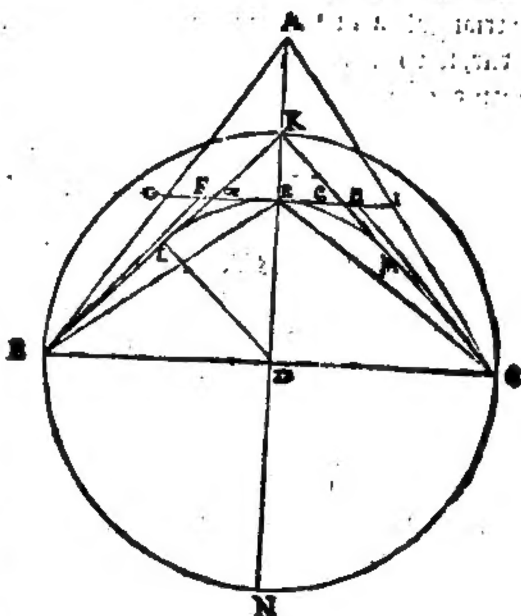
Esto Coni KBC *basis circulus* KBNC *sectus normaliter diametris* KN, BC. *Quia recta* KB, KC *sunt latera quadrati circulo inscripti, & angulus* A *rectus, Conus* KBC *erit orthogonius, per definitionem* XVIII *Elementi* XI. *Secto latere* KB *bifariam in* L, *& iuncta* DL,

erit

erit angulus DLK *rectus, per tertiam tertij. Angulus quoque* K *est rectus. Ergo recta* DL, CK *sunt parallelæ, per* XXVIII *primi. Ideo conus* KBC *sectus per* DL *faciet parabolem. Faciat parabolen* BLEMC, *abscissa scilicet recta* DE, *quæ sit æqualis ipsi* DL, *& ideo sit altitudo paraboles, cuius basis est æqualis diametro basis conicæ, & idcirco maxima omnium basium parabolicarũ in sectione coni orthogonij, & tota triangulo* KBC *inscripta, hoc est non secta a triangulo* KBC, *quod quidẽ triangulum fit plano conum per verticem & axem secante, per* III *primi Conicorum Apollonij. Inscribatur triangulum* EBC *in eadem parabole. Ostendamus parabolen* BLEMC *ad triangulum inscriptum (hoc est ad triangulum in eadem basi & altitudine) habere rationem minorem sesquitertia. Cum recta* DE *componatur recta* EA *æqualis eidem* DE: *& iunctis* AC, AB, *a puncto* E *agatur recta* GI *parallela recta* BC, *per* XXXI *primi, coniungens latera* AC, AB, *trianguli* ABC, *in punctis* G, I. *Anguli* IEA, CDA, *aut* IED, CDE *erunt æquales, nempe recti, per* XXVIII, *aut* XXIX *primi. Et propterea per* IIII *primi, Triangulorum* AEG, AEI *bases* AG, AI *sunt æquales: & triangula* ADC, AEI, *aut* ADB, AEG *sunt æquiangula. Ideo per* IIII *sexti, erit vt* AD *ad* DB, *ita* AE *ad* EG: *& ἐναλλὰξ, vt* AD *ad* AE, *ita* DB *ad* EG. *Sed* AD *est dupla recta* AE. *Ergo* DB *est dupla ipsius* EG. *Igitur totum triangulum* AGI, *& triangulum* EBD *sub æqualibus altitudinibus* EA, ED *constituta, sunt inter se, vt bases* GI, DB, *hoc est æqualia, per primam sexti. Rursus triangula* EBD, EGB *inter duas parallelas* GE, BD *sunt sub eadem altitudine, per definit.* IIII *sexti. Quare per primam eiusdem, Triangula* GEB, BDE, *sunt inter se, vt bases* GE, BD. *Quapropter Triangulum* GEB *Trianguli* BED *est dimidium: & duo simul Triangula* GEB, IEC *Triangulo* EBD, *aut* EDC, *aut* AGI *sunt æqualia. Unde totum Triangulum* ABC *in quatuor triangula æqualia resoluitur. Et in genere omne Triangulum isosceles resoluitur in quatuor triangula æqualia, sectis omnibus lateribus bifariam: in nouem, sectis trifariam; in sexdecim, sectis quadrifariam; & ita deinceps per numeros quadratos. Erit igitur Triangulum* ABC

Trian-

Trianguli EBC *duplum, & Trapezij* GICB *sesquitertium. Ablata* FG *tertia parte totius* EG, *&* HI *totius* EI, *per* IX *sexti, & iunctis* FB, HG, *quia* FG *pars est ipsius* αG, *&* HI *ipsius* βI, *triangula* GFB, IHC *erunt remotiora a parabole* BLEMC, *quam Triangulum* KBC, *quod circunscribit parabolen, & non secat eam. Ergo* GFB, IHG *multo minus secabunt parabolen, sed ab ea separata erunt. Triangula porro* GFB, GEB *sub eadem altitudine* DE *constituta sunt inter se, vt bases* GF, GE. *Erit ergo Triangulum* GEB *trianguli* GFB, *item Triangulum* EIG *trianguli* HIC *triplum. Qualium igitur Triangulum* FEB *est duum, talium vnius erit Triangulum* GFB *&* HIC: *& qualium duodecim sunt triangula duo simul* EDC, EDB, *talium sexdecim erit Trapezium* FHCB. *Ergo ratio Trapezij* FHCB *ad triangulum isosceles* EBC *eandem altitudinem & basim cum parabole* BLEMC *habens, est sesquitertia. Sed parabole* BLEMC *est minor Trapezio* FHCB. *Ratio igitur paraboles* BLEMC *ad triangulum* BEC *eandem basim & altitudinem cum parabole habens, est minor sesquitertia, per priorem partem* VIII *quinti. Quod erat faciendum.*



ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ergo aut non omnes Parabolæ, aut nullæ habent rationem sesquitertiam ad triangulum eandem basim & altitudinem cum ipsa Parabole habens. Atqui Archimedes libro περὶ τετραγωνισμοῦ παραβολῆς demonstrat parabolen omnem esse sesquitertiam trianguli sibi inscripti: quam demonstrationem multis epichiremasin Mechanicis muniuit. Sane mirum est tam egregium opus hac vnica propositione nostra oppugnari. neque quomodo Archimedem tantum virum defendam, video. Quinetiam Parabole, qua vtitur idem Archimedes, eodem modo potest oppugnari.

Quod

Quod satis mirari non possum. Infinitas alias parabolas adducere possumus, ita vt habeant ad suum triangulum rationem sesquitertia minorem. Sed idem fecit in Parabola Archimedes, quod in circulo, cylindro, Ellipsi. Prius enim per παχυμερῶν emensus est. Deinde rationem conatus est reddere, καὶ τὰ ἀνέκλειπτα, vt solet, ἀποδεῖξαι. Si non Geometriam, sed oculos in consilium adhibeamus, quis prima fronte, nulla demonstratione praeeunte, non videt, figuram BLEB esse minorem tertia parte trianguli BED? Ne autem vllum dubium in figura paraboles BLEMC relinqueretur, scito nos eam parabolen ad sectionem Coni materialis, quam proxime fieri potuit, efformasse.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.